Die Definition des Integrals für stetige Funktionen bei Cauchy und Dirichlet

Autor(en): **Constantinescu, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **35 (1980)**

Heft 6

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-34688

Elementarmathematik und Didaktik

Die Definition des Integrals für stetige Funktionen bei Cauchy und Dirichlet[1])

Obwohl die Integrationstheorie schon im 17. Jahrhundert entwickelt wurde und das 18. Jahrhundert gelegentlich das Jahrhundert der Differential- und Integralrechnung genannt wird, wurde das Integral erst im 19. Jahrhundert definiert, und zwar im Jahre 1823 in einem Buch von Cauchy. Das muss uns nicht wundern, denn viele mathematische Theorien wurden damals entwickelt, ohne dass im voraus die Grundbegriffe definiert wurden. Das Integral bildete somit keine Ausnahme: die Ableitung, die Konvergenz, die reellen und komplexen Zahlen sind auch Beispiele von Begriffen, die erst im Laufe des 19. Jahrhunderts definiert wurden. Man begann das Gebäude der Analysis nicht wie ein normales Gebäude von unten nach oben zu bauen, sondern man fing irgendwo in der Mitte an, und man entwickelte die Theorie nach oben und nach unten gleichzeitig - eher nach oben als nach unten; nach unten öfters nur unter dem Zwang, dass die Analysis nicht mehr entwicklungsfähig war ohne eine Klärung der Grundlagen.

Cauchy brachte die Definition des Integrals unter einem didaktischen Zwang. Er war nämlich nicht nur in der Forschung, sondern auch in der Lehre tätig, was für jene Zeiten keine Selbstverständlichkeit war, und machte beides mit grosser Begeisterung. Augustin-Louis Cauchy wurde 1789 geboren. 1816 wurde er Professor an der Ecole Royale Polytechnique in Paris. Seine Vorlesungen bestanden aus vier Teilen. Der erste Teil, den er «Analyse algébrique» nannte, enthielt die Grunddefinitionen, die Hauptfunktionen (rationale, algebraische, trigonometrische Funktionen wie auch Logarithmus und Exponentialfunktion), das Rechnen mit komplexen Zahlen und die Reihentheorie. Der zweite Teil war der Differentialrechnung gewidmet, der dritte Teil der Integralrechnung und der vierte Teil den Anwendungen der Differential- und Integralrechnung in der Geometrie. Er hat seine Vorlesungen auch publiziert. Der erste Teil - Analyse algébrique - erschien 1821; 1823 erschienen die Differential- und Integralrechnung (in verkürzter Form) sowie 1826 und 1828 die ersten zwei Bände das letzten Teils. 1829 publizierte er eine verbesserte Auflage der Differentialrechnung und versprach in der Einleitung, dasselbe für die Integralrechnung zu tun. Dazu ist es aber nicht mehr gekommen, da Cauchy 1830 aus politischen Gründen gezwungen wurde, Frankreich zu verlassen: er verweigerte dem neuen König Louis Philippe den Eid und blieb den Bourbonen treu. Später beauftragte er einen ehemaligen Schüler, den Abbé Moigno, eine neue Auflage seiner Bücher zu publizieren: 1840 erschien die Differentialrechnung, 1844 der erste Band der Integralrechnung und 1861 der zweite Band der Integralrechnung.

Das Integral wird folgendermassen definiert. Sei $[x_0, X]$ ein Intervall der reellen Achse und f eine stetige reelle Funktion auf $[x_0, X]$. Man zerlegt das Intervall in kleine Intervalle durch Punkte $x_i (i=0,1,\dots n)$, wobei $x_n = X$ ist, und man bildet die Summen

1) Auszüge aus der Einführungsvorlesung, gehalten an der ETH Zürich am 23. Januar 1979.

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$

Diese Summen konvergieren gegen einen Wert, wenn die Zerlegungen des Intervalls immer feiner werden, so dass die Länge des grössten Intervalls der Zerlegung gegen Null konvergiert. Dieser Wert wird das Integral von f genannt. Cauchy schlägt drei Bezeichnungen für das Integral vor, wobei er die von Fourier eingeführte Bezeichnung

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

als die beste schätzt. Diese Bezeichnung hat sich dann auch durchgesetzt.
Die Stetigkeit, die in dieser Definition vorkommt, wurde von Cauchy im ersten Buch definiert, also 1821. Sie lautet: «La fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+a)-f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de a.» Leider finden wir für den Ausdruck «décroît indéfiniment» keine Definition, sondern nur eine Beschreibung, woraus zu sehen ist, dass er dadurch die Konvergenz gegen Null versteht. Das zieht natürlich die Definition der Stetigkeit selbst in Mitleidenschaft. Unangenehm ist auch die Tatsache, dass die Stetigkeit auf einem bestimmten Intervall definiert wird und nicht in einem Punkt. Die Stetigkeit in einem Punkt wird von Cauchy überhaupt nicht erwähnt. Er definiert nur den Begriff «stetig in der Umgebung eines Punktes», d.h. stetig auf einem Intervall, das diesen Punkt enthält, ein Begriff, der aber keine mathematische Bedeutung hat. Unstetig in einem Punkt heisst für Cauchy - im Gegensatz zu uns - nicht stetig in der Umgebung des Punktes; wieder ein Begriff ohne mathematische Bedeutung.
An dieser Stelle fühle ich mich verpflichtet, den Namen von Bolzano zu erwähnen, da er vor Cauchy eine bessere Definition der Stetigkeit gab. Es handelt sich dabei um die erste Definition der Stetigkeit, die überhaupt gegeben wurde. Man findet diese Definition in einem Buch von Bolzano, das 1817 in Prag erschien und das folgenden Titel trägt: «Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.» Die Definition lautet:
«Nach einer richtigen Erklärung nähmlich versteht man unter der Redensart, daß eine Function f für alle Werthe von x, die inner = oder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nun so viel, daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-fx$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.»
Offenbar hat Cauchy diese Definition von Bolzano nicht gekannt. Im allgemeinen muss gesagt werden, dass die Arbeiten Bolzanos zu jener Zeit nicht sehr bekannt waren. Er war kein Berufsmathematiker, sondern katholischer Priester - sogar ein sehr engagierter, eine der Hauptfiguren der katholischen Aufklärung, die in Böhmen grosse Wellen schlug. Aber die Behauptung, dass er damals der mathemati-

schen Welt vollständig unbekannt war, wäre übertrieben. Wir wissen z. B., dass Abel einige Arbeiten von Bolzano gelesen und sehr geschätzt hat. Auch haben Bolzanos Bücher einen grossen Einfluss auf Cantor ausgeübt, als dieser die Mengenlehre entwickelte.

Was den Beweis der oben erwähnten Konvergenz der Summen in der Definition des Integrals bei Cauchy betrifft, so muss gesagt werden, dass auch er unbefriedigend ist. Er nimmt stillschweigend an, dass die Funktion gleichmässig stetig ist, was er aber nicht bewiesen hat. Er schätzt sehr sorgfältig die Differenz von zwei solchen Summen und stellt fest, dass sie kleiner als die Länge $X - x_0$ ist, multipliziert mit der grössten Schwankung der Funktion in den Intervallen der Zerlegungen. Da die Funktion stetig ist - führt er den Beweis weiter -, kann man die Intervalle so klein wählen, dass die Schwankungen beliebig klein gemacht werden können. Das stimmt nur, wenn man im voraus gezeigt hat, dass die Funktion gleichmässig stetig ist, was er - wie gesagt - nicht getan hat. Es ist anzunehmen, dass Cauchy überhaupt nicht merkte, dass es sich hier um zwei verschiedene Begriffe handelte. Wahrscheinlich hat er die Stetigkeit und die gleichmässige Stetigkeit verwechselt. Auch in der neuen Auflage seines Schülers, des Abbé Moigno, aus dem Jahre 1844 wiederholt sich der Mangel.

Es ist sehr wahrscheinlich, dass der erste richtige Beweis der obigen Konvergenz - die für die Definition des Integrals allerdings notwendig ist - von Dirichlet gebracht wurde[2]). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet wurde 1805 in Düren bei Aachen geboren. Dirichlet ist ein Herkunftsname, er stammt von «de Richelet». Nach Beendigung des Gymnasiums in Köln, wo er den berühmten Physiker Ohm als Mathematiklehrer hatte, fährt Dirichlet nach Paris, wo er von Mai 1822 bis Herbst 1826 Mathematik studiert. Ab 1827 ist er in Deutschland tätig, und zwar für kurze Zeit in Breslau, dann in Berlin und schliesslich in Göttingen bis zu seinem Tode im Jahre 1859. Der genaue Zeitpunkt, wann Dirichlet den Beweis gab, dass jede stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall gleichmässig stetig ist (der heute unter dem Namen «Satz von Heine» bekannt ist), und anschliessend den Beweis von Cauchy richtigstellte, ist unbekannt. In seiner berühmten Arbeit «Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen», die er 1837 in Repertoiren der Physik publizierte, behauptete Dirichlet nach der Definition des Integrals, dass die entsprechende Konvergenz «sich leicht streng beweisen lässt». Die Unterstreichung «streng» fällt dabei auf. Es ist anzunehmen, dass Dirichlet den entsprechenden Beweis in einigen von seinen Vorlesungen in Berlin und Göttingen gab. Folgende Vorlesungen kommen in Frage:

1. Differential- und Integralrechnung, Sommer 1832.
2. Differential- und Integralrechnung, Winter 1834/35.
3. Die Lehre von den bestimmten Integralen, Sommer 1835.
4. Über bestimmte Integrale, Winter 1836/37.
5. Über bestimmte Integrale, Winter 1837/38.
6. Die Lehre von den bestimmten Integralen, Sommer 1840.

2) Auf diese Tatsache wurde ich durch einen Vortrag von Prof. G.S. Goodman an der Universität Zürich aufmerksam gemacht.

7. Die Theorie der bestimmten einfachen und vielfachen Integrale, Winter 1845/46.
8. Die Theorie der einfachen und vielfachen bestimmten Integrale, Sommer 1848.
9. Die Lehre von den bestimmten einfachen und vielfachen Integralen, Sommer 1850.
10. Die Lehre von den bestimmten Integralen, Sommer 1852.
11. Die Lehre von den bestimmten Integralen, Sommer 1854.
12. Die Lehre von den bestimmten einfachen und vielfachen Integralen, Winter 1856/57.
13. Die Lehre von den bestimmten einfachen und vielfachen Integralen, Sommer 1858.

Die letzten zwei Vorlesungen aus dieser Liste wurden in Göttingen gehalten, alle anderen in Berlin. Glücklicherweise sind uns Spuren zweier dieser Vorlesungen erhalten geblieben. Die erste Spur findet man im Buch von G.F. Meyer «Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. Gustav Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über bestimmte Integrale», das in Leipzig 1871 erschien. In seinem Vorwort schreibt Meyer: «Das Werk, welches ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, ist aus den während meiner akademischen Thätigkeit zu wiederholten Male an der Georgia Augusta von mir gehaltenen Vorlesungen hervorgegangen. Die Grundlage für diese Vorträge bildeten die Aufzeichnungen, welche ich mir in den von Dirichlet im Sommersemester 1858 gehaltenen Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale gesammelt hatte. Obwohl diese Notizen nicht den ganzen Reichthum der überaus schönen, strengen und doch so einfachen Entwicklungen meines unvergesslichen Lehrers enthielten, ja hier und da sogar in dem die Formeln begleitenden Gedankengange Lücke zeigten, oder wegen der kurzen Form, die ich während des Collegiums derselben gegeben hatte, bei der spätern Bearbeitung oft mit Mühe enträthselt werden mussten: so glaube ich doch behaupten zu dürfen, dass in dem Nachfolgenden der eigentliche Kern des Dirichlet'schen Vortrages vollständig wiedergegeben ist.» Auf der dritten Seite dieses Buches finden wir folgenden Text: «Von den continuirlichen Functionen gilt nun folgender wichtige Satz:

> Unterscheiden sich in einem gegebenen Intervalle je zwei aufeinanderfolgende Werthe der unabhängig Veränderlichen um weniger als eine beliebig kleine Grösse δ, so muss der Unterschied der entsprechenden Functionswerthe weniger als β betragen, wo β ein dem δ entsprechend gewähltes beliebig kleines Quantum bezeichnet.

Die Wahrheit dieses Satzes leuchtet unmittelbar aus der Definition der stetigen Functionen ein, doch ist seine Allgemeingültigkeit nur auf ein endliches Intervall beschränkt.»

Als Gegenbeispiel wird die Funktion $\sin x^2$ gegeben. Die Definition des Integrals erfolgt schon auf Seite 4. Der Beweis der Konvergenz der Cauchyschen Summen stützt sich auf die oben erwähnte gleichmässige Stetigkeit.
Die zweite Spur der Dirichletschen Vorlesungen finden wir im Buch von G. Arendt «G. Lejeune-Dirichlets Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfa-

chen bestimmten Integralen», das in Braunschweig 1904 erschien. In seiner Vorrede schreibt Arendt: «Das Buch, welches ich hiermit der Oeffentlichkeit übergebe, hat zur Grundlage eine von mir mit großer Sorgfalt meist am Tage des Vortrages selbst angefertigte und daher in hohem Grade zuverlässige und ganz lückenlose Ausarbeitung der von Dirichlet im Sommer 1854 an der hiesigen Universität in wöchentlich vier Stunden gehaltenen Vorlesung über die Lehre von den bestimmten Integralen und des zugehörigen einstündigen Publikums, in dem einige Anwendungen der im ersten Teile der Hauptvorlesung behandelten einfachen bestimmten Integrale gezeigt werden.»

«Aufs peinlichste war ich bei der Abfassung meines Buches darauf bedacht, den Vortrag Dirichlets in seiner ganzen Ursprünglichkeit, ohne Kürzungen oder Veränderungen, aber auch ohne irgend welche eigene oder fremde Zusätze wiederzugeben.»

«Mein Heft hat mich auch befähigt, Dirichlet, wo es irgend angängig war - sicher nicht zum Nachteil der Darstellung - nahezu mit seinen eigenen Worten sprechen zu lassen und auch die Fremdwörter und gewisse Redewendungen zu gebrauchen, deren er sich mit Vorliebe bediente, die aber immer seinen Gedanken einen prägnanten und bezeichnenden Ausdruck verliehen.»

Aus derselben Vorrede erfahren wir, dass Arendt auch die gleichnamige Vorlesung Dirichlets des Jahres 1852 besucht hat. Auf Seite 4 dieses Buches finden wir folgenden Text:

> «*Fundamentaleigenschaft der stetigen Funktionen.* Es sei $y=f(x)$ eine in dem endlichen Intervall von a bis b stetige Funktion von x, und unter Teilintervall verstehe man die Differenz jeder zweier beliebiger Werte von x, also jedes beliebige Stück der Abscissenachse zwischen a und b. Dann besteht immer die Möglichkeit, zu einer beliebig klein gewählten absoluten Größe σ eine zweite ihr proportionale kleine Größe ρ von solcher Beschaffenheit zu finden, daß in jedem Teilintervall, welches $\leqslant\sigma$ ist, die Funktion y sich um nicht mehr als höchstens ρ ändert.»

Im Gegensatz zum Buch von Meyer finden wir hier anschliessend einen ziemlich langen und detaillierten Beweis, der mit dem von Heine 1872 gegebenen Beweis vollständig zusammenfällt. Auch hier wiederholt sich das im Buch von Meyer vorkommende Gegenbeispiel $\sin x^2$, also einer stetigen, nicht gleichmässig stetigen reellen Funktion auf einem nicht beschränkten Intervall. Die Definition des Integrals erfolgt auf Seite 8. Der Beweis der Konvergenz der Cauchyschen Summen erfolgt aufgrund der oben bewiesenen gleichmässigen Stetigkeit der Funktion.

Man könnte somit schliessen, dass Dirichlet den Satz von Heine und den Beweis der Existenz des bestimmten Integrals schon 1854, vielleicht sogar 1852, in seinen Vorlesungen brachte. Erinnert man sich aber seiner oben zitierten Bemerkung aus dem Jahre 1837, so fühlt man sich verlockt, die entsprechenden Jahreszahlen unter 1837 zu senken. Es ist in der Tat schwer zu verstehen, wie Dirichlet seine Vorlesung aus dem Sommersemester 1835 mit dem prägnanten Titel «Die Lehre von den bestimmten Integralen» überhaupt halten konnte, ohne die entsprechenden Beweise durchzuführen. Denn Dirichlet ist durch die Strenge seiner Beweise allgemein bekannt. Wie seine Zeitgenossen über ihn in dieser Hinsicht dachten, erfahren wir aus folgendem Zitat aus dem Brief, den sein Kollege Jacobi an Alexander von

Humboldt am 21. Dezember 1846 schrieb: «Er allein, nicht ich, nicht Cauchy, nicht Gauß weiß, was ein vollkommen strenger mathematischer Beweis ist, sondern wir lernen es erst von ihm. Wenn Gauß sagt, er habe etwas bewiesen, ist es mir sehr wahrscheinlich, wenn Cauchy es sagt, ist ebensoviel pro als contra zu wetten, wenn Dirichlet es sagt, ist es gewiß.»

C. Constantinescu, ETH Zürich

Eine elementar-geometrische Herleitung von $\int_0^a x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,a^{n+1}$

Diese Formel werden wir mittels vollständiger Induktion über n beweisen; die Fälle $n=0$ und $n=1$ betrachten wir nicht; der Induktionsanfang ($n=2$) wird den Weg erkennen lassen.

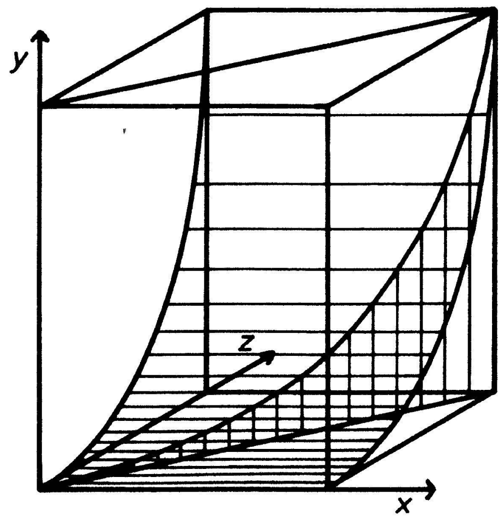

Abb. 1

Unsere Grundfigur ist ein Quader, der auf das Koordinatensystem abgestützt ist und die Dimensionen a, a^{n-1}, a aufweist (Abb. 1). Dieser Quader wird von zwei Flächen mit den Gleichungen $x-z=0$ und $y-z^{n-1}=0$ geschnitten. Durch beide Flächen zerfällt unser Quader in insgesamt vier Teile; im folgenden werden wir die beiden unteren Teile bez. ihres Rauminhalts vergleichen.

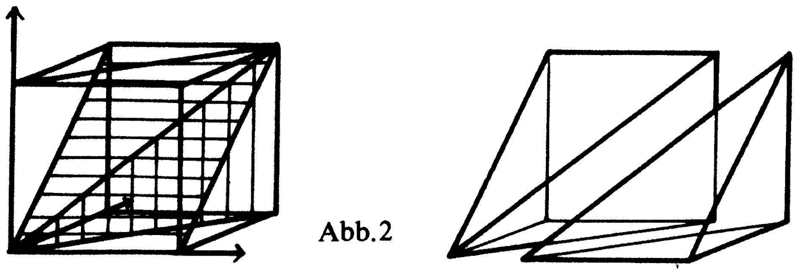

Abb. 2

Induktionsanfang ($n=2$, Abb. 2). Die beiden unteren Teile zusammen haben den Rauminhalt $a^3/2$. Der Rauminhalt des rechten unteren Teils ist halb so gross wie der des linken unteren Teils. Denn der linke untere Teil ist eine Pyramide mit der Höhe a (in z-Richtung) und der Grundfläche a^2, und der rechte untere Teil ist eine Pyramide mit der Höhe a (in x-Richtung) und der Grundfläche $a^2/2$. Beide