

# Zur Definition des Flächeninhalts in affinen Ebenen

Autor(en): **Hotje, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 2

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-33798>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

El. Math.

Band 34

Heft 2

Seiten 25–48

10. März 1979

## Zur Definition des Flächeninhalts in affinen Ebenen

### 1. Einleitung

Der Flächeninhalt wird zumeist in euklidischen Ebenen definiert, was herauskommt, ist aber schon mit affinen Begriffen formulierbar, etwa die Beschreibung des Parallelogramminhalts durch die Determinante [1]. Es sind daher auch Axiomensysteme für den Flächeninhalt in affinen Ebenen angegeben worden, so etwa in [5], wo die aufgeführten Axiome im wesentlichen Übersetzungen der Forderungen an die Determinante sind. Wir wollen hier von einem anderen Standpunkt ausgehen, der etwa so motiviert werden könnte:

Der Flächeninhalt ist das Produkt von Längen, das Teilverhältnis bleibt bei affinen Kollineationen invariant, es müssen also auch Verhältnisse von Flächen bei affinen Kollineationen invariant bleiben.

Wir werden sehen, dass wir aus dieser Forderung in einer affinen Koordinatenebene schon wesentliche Eigenschaften des Flächeninhaltes herleiten können, und wir werden einen Zusammenhang mit Eigenschaften des zugrundeliegenden Körpers herstellen. Ausserdem können wir eine Bemerkung von Hilbert ([2], S. 80) erläutern, nach der ein sinnvoller Inhaltsbegriff nur in den pappusschen Koordinatenebenen möglich ist.

### 2. Geometrische Bewertung

Es sei  $(A, \mathfrak{G})$  eine pappussche affine Ebene,  $K$  der zugehörige Koordinatenkörper.  $\mathfrak{A}$  bezeichne die Menge der affinen Kollineationen von  $(A, \mathfrak{G})$ , d. h. die Menge der Kollineationen, die sich als Produkt einer Translation mit einer linearen Abbildung des  $K^2$  darstellen lassen. Ferner sei  $A_0^3 := \{ \Delta = (a_1, a_2, a_3) \in A^3; \{\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}\} = A \}$  die Menge der echten *Dreiecke* aus  $A$ .

Ist  $G$  eine abelsche Gruppe, so heisse  $\varphi: A_0^3 \rightarrow G$  eine *geometrische Bewertung* (vom Rang 3) von  $(A, \mathfrak{G})$ , wenn gilt:

(A) Für  $\Delta_1, \Delta_2 \in A_0^3$  und  $a \in \mathfrak{A}$  ist  $\varphi(\Delta_1) (\varphi(\Delta_2))^{-1} = \varphi(\Delta_1^a) (\varphi(\Delta_2^a))^{-1}$ .

Ist  $\Delta = (a_1, a_2, a_3)$ , so sei  $\Delta^a = (a(a_1), a(a_2), a(a_3))$ . Zur Abkürzung führen wir die Abbildung

$$\psi: \begin{cases} (A_0^3)^2 \rightarrow G \\ (\Delta_1, \Delta_2) \rightarrow \varphi(\Delta_1) \cdot (\varphi(\Delta_2))^{-1} \end{cases}$$

ein, die wir als *Bewertungsverhältnis* bezeichnen werden.

Der elementare Flächeninhalt im  $\mathbf{R}^2$  erfüllt die Bedingung (A) mit  $G = \mathbf{R}_{>0}$ .

Aus der Invarianz des Bewertungsverhältnisses lassen sich leicht einige Folgerungen herleiten, von denen einige uns vom elementaren Flächeninhalt her geläufig sind:

(1) Ist  $\psi: (A_0^3)^2 \rightarrow G$  ein Bewertungsverhältnis, so gelten:

a)  $\psi(\Delta_1, \Delta_2) \cdot \psi(\Delta_2, \Delta_3) = \psi(\Delta_1, \Delta_3)$ ,

b)  $(\psi(\Delta_1, \Delta_2))^{-1} = \psi(\Delta_2, \Delta_1)$ .

(2) Es seien  $\Delta = (a_1, a_2, a_3) \in A_0^3$ ,  $P \in \mathfrak{S}_3$  eine ungerade Permutation und  $\Delta^P := (a_{P(1)}, a_{P(2)}, a_{P(3)})$ . Dann ist  $\psi(\Delta, \Delta^P) = \varepsilon$  mit  $\varepsilon^2 = 1$ , und  $\varepsilon$  hängt nicht von  $P$  und  $\Delta$  ab.

Beweis: Zu  $P \in \mathfrak{S}_3$  finden wir  $\bar{P} \in \mathfrak{A}$  mit  $\Delta^P = \Delta^{\bar{P}}$ . Ist  $a \in \mathfrak{A}$ , so gilt

$$\psi(\Delta, \Delta^P) = \psi(\Delta^a, \Delta^{Pa}) = \psi(\Delta^a, \Delta^{a(a^{-1}Pa)}),$$

und als Permutation der Indizes stimmt  $P$  mit  $a^{-1}Pa$  überein. Damit ist  $\varepsilon$  von  $\Delta$  unabhängig, und es gilt für  $P_1, P_2 \in \mathfrak{S}_3$ :

$$\psi(\Delta, \Delta^{P_1}) \cdot \psi(\Delta, \Delta^{P_2}) = \psi(\Delta, \Delta^{P_1}) \psi(\Delta^{P_1}, \Delta^{P_1 \cdot P_2}) = \psi(\Delta, \Delta^{P_1 \cdot P_2}).$$

Die Abbildung  $h: P \rightarrow \psi(\Delta, \Delta^P)$  ist also ein Homomorphismus.  $\mathfrak{A}_3$  ist der einzige echte Normalteiler von  $\mathfrak{S}_3$  mit abelscher Faktorgruppe. Der Index von  $\mathfrak{A}_3$  in  $\mathfrak{S}_3$  ist 2, daher enthält die Faktorgruppe das gesuchte  $\varepsilon$ .

Der folgende Satz zeigt, dass die geometrische Bewertung bei Scherung des Dreiecks invariant bleibt.

(3) Es seien  $a_1 \neq a_2$ ,  $b_1 \neq b_2$  und  $\overline{b_1, b_2} \parallel \overline{a_1, a_2}$ .

Dann ist

$$\varphi(b_1, a_1, a_2) = \varphi(b_2, a_1, a_2).$$

Beweis: Wegen (A) können wir in  $K^2$  setzen:  $a_1 = (0, 0)$ ,  $a_2 = (0, 1)$  und  $b_1 = (1, 0)$ .

Dann gibt es ein  $k \in K$  mit  $b_2 = (1, k)$ , und es gilt für  $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$ :

$$a(a_1) = a_1, a(a_2) = a_2, a(b_1) = b_2.$$

Mit  $\beta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$  haben wir

$a = \gamma \cdot \beta$ ,  $\beta^2 = \gamma^2 = \text{Id}$  und  $\beta(a_1) = a_1 = \gamma(a_1)$ ,  $\beta(-1, 1) = (1, 1)$ ,  $\beta(1, 1) = (-1, 1)$ ,  $\gamma(1, 1) = (-1, k+1)$ ,  $\gamma(-1, k+1) = (1, 1)$ . Ist  $\text{char } K \neq 2$ , so sind  $\Delta = ((0, 0), (-1, 1), (1, 1))$  und  $\Delta^* = ((0, 0), (1, 1), (-1, k+1))$  aus  $A_0^3$ , und nach (2) ist  $\psi(\Delta, \Delta^\beta) = \varepsilon = \psi(\Delta^*, \Delta^{*\gamma})$  und damit für  $\Delta_1 := (b_1, a_1, a_2)$   $\psi((b_1, a_1, a_2), (b_2, a_1, a_2)) = \psi(\Delta_1, \Delta_1^\gamma) \cdot \psi(\Delta_1^\gamma, \Delta_1^{\gamma\beta}) = \psi(\Delta^*, \Delta^{*\gamma}) \cdot \psi(\Delta, \Delta^\beta) = \varepsilon^2 = 1$ .

Ist  $\text{char } K = 2$ , so ist offenbar  $a = \gamma$ , also  $\psi(\Delta_1, \Delta_1^a) = \varepsilon$ . In diesem Fall ist aber stets schon  $\varepsilon = 1$ , denn seien  $\gamma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_i & 1 \end{pmatrix}$   $i = 1, 2, 3$  und  $k_1 \neq k_2$ , so gilt wie oben  $\gamma_3 = \gamma_1 \cdot \gamma_2$  bei  $k_1 + k_2 = k_3$  und  $\varepsilon = \psi(\Delta, \Delta^{\gamma_3}) = \psi(\Delta, \Delta^{\gamma_2}) \cdot \psi(\Delta^{\gamma_2}, \Delta^{\gamma_1 \cdot \gamma_2}) = \varepsilon^2$ .

(4) Ist  $a \in \mathfrak{A}$  eine Translation, so gilt

$$\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta^a).$$

**Beweis:** Wir können die Translation in zwei Translationen zerlegen, deren Spuren parallel zu zwei Dreiecksseiten sind. Seien also  $\Delta = (a_1, a_2, a_3)$  und  $\Delta^\tau = (b_1, b_2, b_3)$  mit  $\overline{a_1, a_2} = \overline{b_1, b_2}$ . Wir setzen  $c = \overline{a_3, b_3} \cap \{a_2 \parallel \overline{b_1, b_3}\}$ .  $\{a_2 \parallel \overline{b_1, b_3}\}$  ist die Parallele zu  $\overline{a_1, a_3}$  durch  $a_2$ . Nach dem kleinen Satz von Pappus ist dann  $\overline{a_3, b_1} \parallel \overline{c, b_2}$ , und mit (2) und (3) haben wir  $\varphi(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, c, a_3) = \varphi(b_1, c, a_3) = \varphi(b_1, b_2, a_3) = \varphi(b_1, b_2, b_3)$ .

Wir wollen jetzt untersuchen, wie sich die Existenz einer Bewertung für den Koordinatenkörper auswirkt. Dazu denken wir uns  $K$  als Gerade in  $(A, \mathfrak{G})$  eingebettet, und  $\Delta = (0, 1, e) \in A_0^3$  sei ein ausgezeichnetes Dreieck.

(5) Ist  $\psi$  ein Bewertungsverhältnis und bezeichne  $\Delta_x = (0, x, e)$  für jedes  $x \in K^* := K \setminus \{0\}$ , so ist

$$f_\psi := \begin{cases} K^* \rightarrow G \\ x \rightarrow \psi(\Delta_x, \Delta) \end{cases}$$

ein Homomorphismus und  $f_\psi(K^*) = \{\psi(\Delta_i, \Delta_j) \in G; \Delta_i, \Delta_j \in A_0^3\}$ .

**Beweis:** Den Nachweis der Homomorphie können wir direkt aus [3] (5) übernehmen. Es bleibt zu zeigen, dass es zu  $\Delta_i, \Delta_j \in A_0^3$  stets  $x \in K^*$  gibt mit  $\psi(\Delta_i, \Delta_j) = f_\psi(x)$ . Dazu kann hier ein einfacherer Beweis als in [3] gegeben werden. Wegen (A) können wir annehmen, dass  $\Delta_j = \Delta$  ist, und wegen (3) und (1), dass  $\overline{b_1, b_3} \parallel \overline{0, e}$  ist für  $\Delta_i := (b_1, b_2, b_3)$ . (4) ermöglicht es uns sogar,  $b_1 = 0$  zu setzen. Mit  $c := \{0 \parallel \overline{e, b_3}\} \cap \{b_2 \parallel \overline{0, b_3}\}$  und  $d := \overline{0, 1} \cap \{c \parallel \overline{0, e}\}$  ist dann

$$\varphi(\Delta_i) = \varphi(0, c, b_3) = \varphi(0, c, e) = \varphi(0, d, e),$$

also

$$\psi(\Delta_i, \Delta_j) = f_\psi(d).$$

Für den elementaren Inhalt ist  $f_\psi(x) = |x|$ .

Die Aussage (5) ist in folgender Weise umkehrbar:

(6) Zu jedem Epimorphismus  $f$  von  $K^*(\cdot)$  auf eine abelsche Gruppe  $G$  gibt es genau ein Bewertungsverhältnis  $\psi$  mit  $G = \{\psi(\Delta_1, \Delta_2); \Delta_1, \Delta_2 \in A_0^3\}$ , so dass  $f = f_\psi$ .

Der Beweis kann wieder [3] entnommen werden. Ist  $\Delta^* = (a_1, a_2, a_3)$  und bezeichne  $\chi_{\Delta^*}$  in  $K^2$  die Matrix  $\begin{pmatrix} a_3 - a_1 & \\ & a_2 - a_1 \end{pmatrix}$ , so ist bis auf einen Faktor, der nicht von  $\Delta^*$  abhängt, die geometrische Bewertung genau durch die Abbildung:  $\Delta^* \rightarrow f(\det \chi_{\Delta^*})$  gegeben.

### 3. Orientierter Flächeninhalt

In jedem Körper existiert die Identität als trivialer Epimorphismus  $f: K^* \rightarrow K^*$ , und in jedem angeordneten Körper mit Positivitätsbereich  $P$  existiert der Epimorphismus  $f: x \rightarrow |x|$ . Die zugehörigen geometrischen Bewertungen bezeichnen wir als *orientierten* bzw. *elementaren Flächeninhalt*, wenn sie noch normiert sind, etwa durch  $\varphi(\Delta) = 1/2$ ;  $\Delta$  sei wie in (5) definiert.

(7) Es sei  $\psi$  ein Bewertungsverhältnis.  $f_\psi$  ist genau dann ein Automorphismus von  $K(+, \cdot)$ , wenn gilt:

(B<sub>0</sub>) Für  $(a_1, a_2, a_3) \in A_0^3$  und  $a \in \overline{a_1, a_2} \setminus \{a_1, a_2\}$  ist  $\varphi(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a, a_3) + \varphi(a, a_2, a_3)$ .

Zum Beweis wählen wir eine Basis in  $K^2$  so, dass  $a_1 = (-x - y, 0)$ ,  $a_2 = (0, 0)$ ,  $a = (-x, 0)$  und  $a_3 = (0, 1)$ . Dann gilt  $\varphi(a_1, a, a_3) = \varphi(a_1 - a, a - a, a_3 - a) = f_\psi \left[ \det \begin{pmatrix} y & 0 \\ x+1 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot g$ , wobei  $g \in G$  von den  $\Delta^* \in A_0^3$  unabhängig ist. Aus den entsprechenden Werten für  $\varphi(a_1, a_2, a_3)$  und  $\varphi(a, a_2, a_3)$  ergibt sich dann, dass die Additivität von  $\varphi$  äquivalent ist zu  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Für einen orientierten Flächeninhalt ist also (B<sub>0</sub>) stets erfüllt.

Die Aussage von (B<sub>0</sub>) bleibt noch richtig für solche  $f$  und solche  $x, y \in K^*$ , für die  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ . Benutzen wir die Definition der Zwischenfunktion aus [4], so haben wir daher noch das folgende Korollar:

(8) Es sei  $\varphi$  ein elementarer Flächeninhalt und  $(| \ , \ )$  die entsprechende Zwischenfunktion. Dann gilt:

(B<sub>e</sub>) Ist  $(a_1, a_2, a_3) \in A_0^3$  und  $a \in \overline{a_1, a_2} \setminus \{a_1, a_2\}$ , so ist  $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (a_2 | a_1, a) \varphi(a, a_2, a_3) + (a_1 | a_2, a) \varphi(a_1, a, a_3)$ .

An dieser Stelle seien noch einige Bemerkungen zur angegebenen Definition des Flächeninhalts gemacht. Wegen (6) ist gewährleistet, dass es in einer pappusschen Ebene genau einen Flächeninhalt gibt, die Definition hat aber den Schönheitsfehler, dass die zweite Bedingung ( $f = \text{Id}$  bzw.  $f = | \cdot |$ ) von der ersten begrifflich abhängt. Im Fall des orientierten Flächeninhalts könnte man wegen (8) in Körpern mit nur einem Automorphismus, etwa  $\mathbf{R}$ , statt dessen auch  $(B_0)$  fordern. Ähnlich könnte man für den elementaren Flächeninhalt in angeordneten Körpern mit nur einem Automorphismus  $(B_e)$  fordern, denn ist  $f: K^*(\cdot) \rightarrow P$  Epimorphismus mit  $f(p+q) = f(p) + f(q)$  für  $p, q \in P$ , so ist

$$f': \left\{ \begin{array}{l} 0 \rightarrow 0 \\ p \rightarrow f(p) \\ -p \rightarrow -f(p) \end{array} \right\} p \in P$$

ein Automorphismus von  $K(+, \cdot)$ .

In  $\mathbf{R}$  haben wir dann im wesentlichen die Axiome aus [1], Kap. II. Dort wird sogar gezeigt, dass schon statt (A) die Invarianz von  $\varphi$  unter den Translationen ausreicht. Will man nicht den zugrundeliegenden Körper auszeichnen, so kann man sich auch mit einer ausführlicheren Normierung behelfen:

$$(C_0) \quad \frac{\varphi(\Delta_x)}{x} = \frac{1}{2} \text{ für alle } x \in K^*. \Delta_x \text{ sei wie in (5) definiert.}$$

Bei  $\text{char } K = 2$  wähle man eine andere Konstante.

$$(C_e) \text{ sei die entsprechende Aussage für } \frac{\varphi(\Delta_x)}{|x|}.$$

(9) Eine geometrische Bewertung ist genau dann ein orientierter bzw. elementarer Flächeninhalt, wenn  $(B_0)$  und  $(C_0)$  bzw.  $(B_e)$  und  $(C_e)$  gelten.

Die Aussage (7) gestattet uns eine teilweise Umkehrung von (3):

(10) Es seien  $\varphi$  ein orientierter Inhalt und  $(a_1, a_2, a_i) \in A_0^3$  für  $i = 3, 4$ ,  $a_3 \neq a_4$ . Ist dann  $\varphi(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a_2, a_4)$ , so gilt  $\overline{a_1, a_2} \parallel \overline{a_3, a_4}$ .

Beweis: Denn wäre  $a = a_4, a_2 \cap \{a_3 \parallel \overline{a_1, a_2}\}$ , so wäre  $\varphi(a_1, a_2, a_4) = \varphi(a_1, a, a_4) + \varphi(a_1, a_2, a) = \varphi(a_1, a, a_4) + \varphi(a_1, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a, a_4) + \varphi(a_1, a_2, a_4)$ , also  $\varphi(a_1, a, a_4) = 0$  und  $(a_1, a, a_4) \in A_0^3$ . Dann ist aber  $\varphi(a_1, a, a_4) \in K^*$ .

Analysiert man den Beweis, so erkennt man, dass nur die folgenden Aussagen von  $\varphi$  benutzt wurden:

$$\left. \begin{array}{l} (3), \\ (B_0), \end{array} \right\} (*)$$

Ist  $a$  eine ungerade Permutation, so ist  $\varphi(a_1, a_2, a_3) = -\varphi(a_{a(1)}, a_{a(2)}, a_{a(3)})$ .

Damit können wir jetzt auf die in der Einleitung angedeutete Bemerkung von Hilbert eingehen und zeigen:

(11) Eine affine Ebene  $(A, \mathfrak{G})$  ist genau dann pappussch, wenn auf ihr eine Abbildung  $\varphi$  von  $A \setminus \{0\}$  in eine Gruppe  $G(+)$  erklärt ist, die den Eigenschaften (\*) genügt und deren Werte von 0 verschieden sind.

Beweis: Es seien  $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$  mit  $G_1 \cap G_2 = \{0\}$  und  $a_i, b_i, c_i \in G_i$ ,  $i=1,2$  je drei paarweise verschiedene Punkte mit  $\overline{a_2, c_1} \parallel \overline{a_1, c_2}$  und  $\overline{c_1, b_2} \parallel \overline{b_1, c_2}$ . Dann gilt nach (\*)  $\varphi(c_2, b_1, b_2) = \varphi(c_2, b_1, c_1)$  und daher  $\varphi(0, b_1, b_2) = \varphi(0, b_1, c_2) + \varphi(c_2, b_1, b_2) = \varphi(0, b_1, c_2) + \varphi(b_1, c_1, c_2) = \varphi(0, c_1, c_2)$ . Ebenso erhält man  $\varphi(0, a_1, a_2) = \varphi(0, c_1, c_2)$ , und damit ist  $\varphi(a_2, b_1, b_2) = \varphi(0, b_1, b_2) + \varphi(a_2, b_1, 0) = \varphi(0, a_1, a_2) + \varphi(b_1, 0, a_2) = \varphi(b_1, a_1, a_2) = \varphi(a_2, b_1, a_1)$ , woraus  $\overline{a_1, b_2} \parallel \overline{b_1, a_2}$  nach (10) folgt.

#### 4. Flächeninhalt von Polygonen

Wir erweitern jetzt unseren Inhaltsbegriff auf Polygone, wobei wir uns für den Fall des elementaren Inhalts auf konvexe Polygone beschränken:

Es seien  $a_1, \dots, a_k \in A$ ,  $k \geq 3$  paarweise verschiedene Punkte. Dann heisst  $(a_1, \dots, a_k)$  ein Polygon. Besitzt  $K$  einen Positivitätsbereich und ist  $(\mid, )$  die zugehörige Zwischenfunktion, so heisst das Polygon *konvex*, wenn für je paarweise verschiedene  $i, j, u, v \in \{1, \dots, k\}$ , so dass zwischen  $i, j$  genau ein  $u$  oder  $v$  und zwischen  $u, v$  genau ein  $i$  oder  $j$  liegen, stets  $d_{ijuv} := \overline{a_i, a_j} \cap \overline{a_u, a_v}$  existiert und wenn gilt  $(d_{ijuv} \mid a_i, a_j) = -1$ . Man zeigt leicht, dass diese Definition mit der üblichen übereinstimmt, nach der ein Polygon konvex heisst, wenn es der Durchschnitt von Halbebenen ist.

Die Bewertung  $\varphi(a, b, c)$  ist zunächst nur erklärt, wenn  $\dim \overline{\{a, b, c\}} = 2$  ist. Wir setzen  $\varphi(a, b, c) = 0$ , wenn  $a, b, c$  kollinear sind. Damit können wir rekursiv für den orientierten Flächeninhalt eines Polygons bzw. für den elementaren Inhalt eines konvexen Polygons  $(a_1, \dots, a_k)$  setzen:

$$\varphi(a_1, \dots, a_k) = \varphi(a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) + \varphi(a_1, \dots, a_i, a_{i+2}, \dots, a_k).$$

Dabei sind die Indizes modulo  $k$  zu nehmen. Dass dieser Inhalt wohldefiniert ist, besagt

(12)  $\varphi(a_1, \dots, a_k)$  ist unabhängig von der Reihenfolge der ausgelassenen Ecken.

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach  $k$ : Sei zunächst  $k=4$ . Es ist zu zeigen:  $\varphi(a_1, a_2, a_4) + \varphi(a_4, a_2, a_3) = \varphi(a_1, a_3, a_4) + \varphi(a_3, a_1, a_2)$ .

Fall 1:  $\overline{a_2, a_4} \parallel \overline{a_1, a_3}$ . Dieser Fall kann nur für den orientierten Inhalt auftreten. Es ist  $\varphi(a_1, a_2, a_4) = \varphi(a_3, a_2, a_4) = -\varphi(a_4, a_2, a_3)$  und  $\varphi(a_1, a_3, a_4) = -\varphi(a_3, a_1, a_2)$ .

Fall 2: Es sei  $d := \overline{a_2, a_4} \cap \overline{a_1, a_3}$ . Dann gilt für die Zwischenfunktion stets  $(a_i \mid d, a_j) = 1$ , und es ist

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, a_2, a_4) + \varphi(a_4, a_2, a_3) &= \varphi(a_1, a_2, d) + \varphi(a_1, d, a_4) + \varphi(d, a_2, a_3) \\ &+ \varphi(a_4, d, a_3) = \varphi(a_1, a_2, d) + \varphi(d, a_2, a_3) + \varphi(a_1, d, a_4) + \varphi(d, a_3, a_4) \\ &= \varphi(a_1, a_2, a_3) + \varphi(a_1, a_3, a_4). \end{aligned}$$

Ist die Aussage schon für Polygone aus  $k - 1$  Punkten richtig, so gilt damit

$$\begin{aligned} \varphi(a_1, a_2, a_3) + \varphi(a_1, a_3, a_4, \dots, a_k) &= \varphi(a_1, a_2, a_3) + \varphi(a_1, a_3, a_k) \\ &+ \varphi(a_k, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}) = \varphi(a_1, a_2, a_3, a_k) + \varphi(a_k, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}) \\ &= \varphi(a_1, a_2, a_k) + \varphi(a_k, a_2, a_3) + \varphi(a_k, a_3, a_4, \dots, a_{k-1}) = \varphi(a_1, a_2, a_k) \\ &+ \varphi(a_k, a_2, \dots, a_{k-1}). \end{aligned}$$

## 5. Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Der Begriff der geometrischen Bewertung ist in [3] sehr viel allgemeiner definiert worden als in dieser Arbeit. Er ermöglicht eine einheitliche Beschreibung von Funktionen wie Teilverhältnis, Zwischenfunktion, Vektormass oder Orientierungsfunktion. Selbst zur Definition eines Inhalts braucht man sich nicht auf den ebenen Fall zu beschränken: Es sei  $(K^n, \mathfrak{G})$  ein pappusscher affiner Raum,  $A_0^{n+1}$  die Menge der echten Simplexe in  $K^n$  und  $\mathfrak{A}$  die Menge der affinen Kollineationen von  $(K^n, \mathfrak{G})$ . Ist  $G(\cdot)$  eine abelsche Gruppe, so heisst  $\varphi: A_0^{n+1} \rightarrow G$  *geometrische Bewertung vom Rang  $n + 1$* , wenn für  $\Delta_1, \Delta_2 \in A_0^{n+1}$  und  $\alpha \in \mathfrak{A}$  gilt

$$\varphi(\Delta_1) \cdot (\varphi(\Delta_2))^{-1} = \varphi(\Delta_1^\alpha) \cdot (\varphi(\Delta_2^\alpha))^{-1}.$$

Durch direktes Nachrechnen und aus [3] entnimmt man, dass für diese Bewertung die Aussagen (1) bis (11) übertragen werden können. Ob sich allerdings eine entsprechende Definition für (konvexe) Polyeder finden lässt, muss zunächst offenbleiben.

H. Hotje, TU Hannover

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
- 2 D. Hilbert: Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl. Stuttgart 1956.
- 3 H. Hotje: Geometrische Bewertungen in affinen Räumen. Abh. math. Semin. Hamburg 45, 82-90 (1976).
- 4 H. Karzel, K. Sörensen und D. Windelberg: Einführung in die Geometrie. Göttingen 1973.
- 5 H. Schaal: Lineare Algebra und Analytische Geometrie. Braunschweig 1976.
- 6 W. Junkers: Über normale Inhaltsfunktionen auf affinen Ebenen, in: Beiträge zur Geometrischen Algebra, Basel 1977. In [6] wird ein der Aussage (11) ähnlicher Satz gezeigt.