

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 1

PDF erstellt am: **19.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

#### 4. Remarks

a) One can show by induction that if  $A_1, A_2, \dots, A_n$  are  $n$  points in space with weights  $m_1, m_2, \dots, m_n$  such that  $s_n = \sum m_i \neq 0$  then for any point  $M$  in space

$$\sum_{i=1}^n m_i \overline{MA_i}^2 = s_n \overline{MA}^2 + \frac{1}{s_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j \overline{A_i A_j}^2 \quad (17)$$

where (with the appropriate convention)

$$A = \frac{1}{s_n} (m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n).$$

This makes it possible to extend our method to higher dimensions.

b) The 'continuous' analogue of (17) is

$$\left[ \int_a^b p(x) dx \right] \left[ \int_a^b p(x) f^2(x) dx \right] = \left[ \int_a^b p(x) f(x) dx \right]^2 + \iint_{a \leq u < v < b} p(u) p(v) [f(v) - f(u)]^2 du dv$$

provided that the various integrals exist, and,

$$\int_a^b p(x) dx \neq 0.$$

Faruk F. Abi-Khuzam, American University, Beirut

#### REFERENCES

- 1 N.A. Court: College Geometry. Barnes and Noble, New York 1952.
- 2 R. Johnson: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications, New York 1960.
- 3 A.H. Stone: Am. Math. Monthly 81, 1026 (1974).

## Kleine Mitteilungen

### Kreispackung in Quadraten

1. Diese kurze Arbeit behandelt ein Problem in der euklidischen Ebene. Sei  $E$  im folgenden ein abgeschlossenes Einheitsquadrat mit den Ecken  $A, B, C, D$ ; sei  $\dot{E}$  der offene Kern von  $E$ . Man greife  $k$  paarweise verschiedene Punkte  $P_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) aus  $E$  heraus und bestimme ihren Mindestabstand  $d$ . Das Quadrat  $G(d)$  mit Seitenlänge  $1+d$  gehe aus  $\dot{E}$  durch eine Streckung hervor, welche als Zentrum den Mittelpunkt von  $E$  besitzt. Die  $k$  offenen Kreise mit Mittelpunkt  $P_i$  und Radius  $d/2$  unterdecken  $G(d)$ ; die Dichte dieser Unterdeckung ist  $(k \pi d^2)/4(1+d)^2$ . Unter allen Möglich-

keiten,  $k$  paarweise verschiedene Punkte aus  $E$  herauszugreifen, ist eine Möglichkeit zu suchen, für welche *der Mindestabstand der  $k$  Punkte maximal* wird; die zugehörige, wie im vorigen Satz gebildete Dichte ist dann diejenige einer dichtesten Unterdeckung eines gegebenen Quadrats durch  $k$  kongruente Kreise (Beweis: vgl. [1] und [2]). Für  $2 \leq k \leq 9$  ist die Bestimmung dieser Maxima gelöst, für  $k \geq 10$  ungelöst. Für einige  $k$  hat Michael Goldberg in [1] die grössten ihm bekannten Mindestabstände von  $k$  Punkten aus  $E$  angegeben. Für  $k=10$  bzw.  $k=13$  stellen Abb.1 bzw. Abb.2 das Quadrat  $E$  und die zu den Goldberg'schen Werten gehörenden  $k$  Punkte aus  $E$  (durch Nullkreise hervorgehoben) dar.

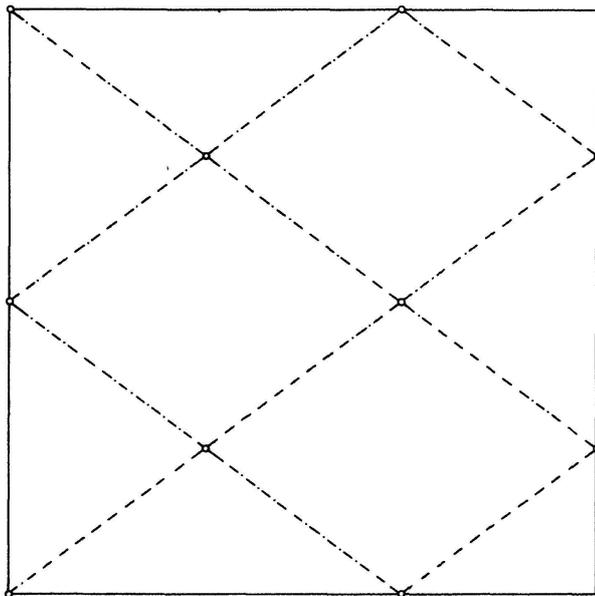


Abb. 1

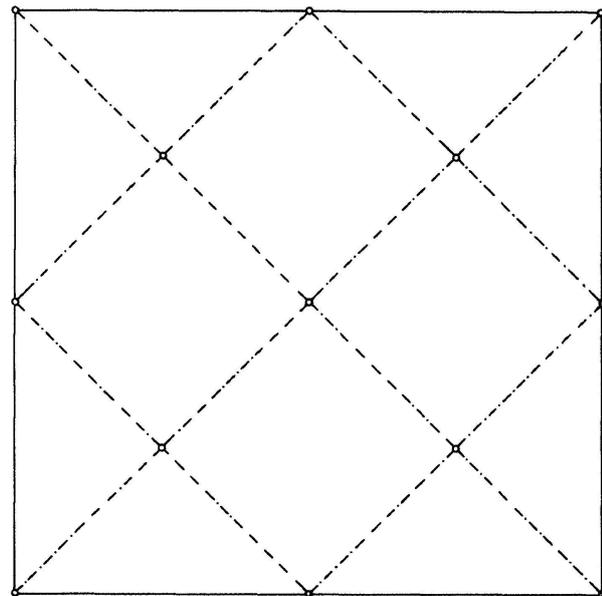


Abb. 2

In [2] wurden für diese beiden Fälle Punktmengen mit grösserem Mindestabstand bestimmt. Für  $k=10$  bzw.  $k=13$  stellen Abb.3 bzw. Abb.4 diese Konfigurationen dar.

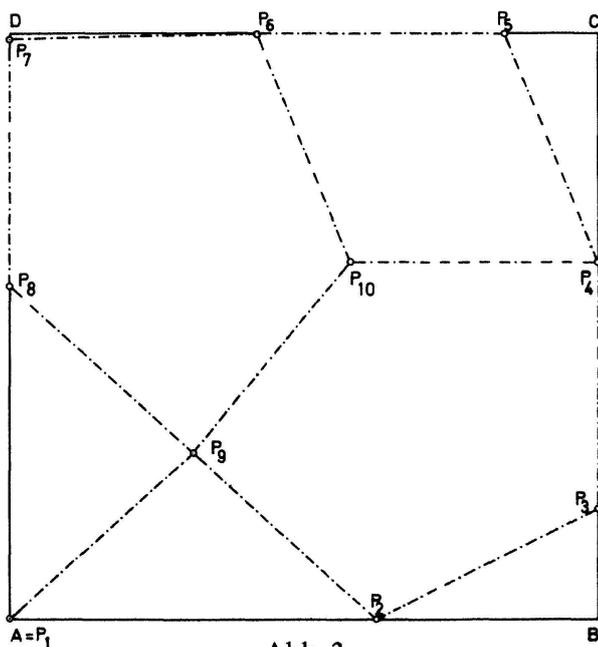


Abb. 3

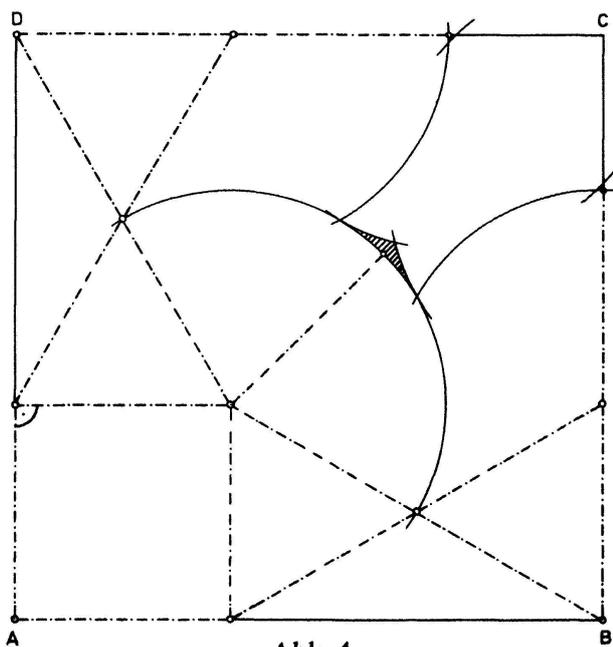


Abb. 4

2. Auf jeweils eine Abbildung bezogen, mögen die strichpunktierten Strecken, die als Endpunkte 2 der hervorgehobenen  $k$  Punkte, aber keine weiteren dieser  $k$  Punkte enthalten, von gleicher Länge sein. (Genau die Endpunkte dieser Strecken besitzen dann bei Beachtung der *knapp erläuterten Konstruktionsvorschriften* dieses Abschnitts Mindestabstand.) Man zerlege  $E$  in 12 kongruente Rechtecke  $R_s$  ( $1 \leq s \leq 12$ ) mit Seitenlängen  $1/4$  und  $1/3$  bzw. in 16 kongruente Quadrate  $Q_t$  ( $1 \leq t \leq 16$ ) mit Seitenlänge  $1/4$ ; die in Abb. 1 bzw. Abb. 2 hervorgehobenen Punkte seien entsprechende Ecken der  $R_s$  bzw.  $Q_t$ . In Abb. 4 beachte man den angegebenen rechten Winkel und lege 3 der 13 Punkte auf die Diagonale  $\overline{AC}$ . In Abb. 3 enthalte der Rand von  $E$  bei Aufzählung im mathematisch positiven Sinn folgende Punkte:  $A = P_1, P_2, B, P_3, P_4, C, P_5, P_6, D, P_7, P_8, A$ .

3. Aufgrund von 2 ergibt sich folgende Tabelle:

Konfiguration dargestellt in	$k$	Mindestabstand $d$	Zugehörige Dichte $\frac{k \pi d^2}{4(1+d)^2}$
Abb. 1	10	$\frac{5}{12}$	0,67941018
Abb. 3	10	0,42127954	0,69003579
Abb. 2	13	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0,69661443
Abb. 4	13	$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	0,73305767

Die im Fall  $k=10$  in Abb. 3 dargestellte Anordnung ist vermutlich die einzige 10elementige Teilmenge von  $E$ , die maximalen Mindestabstand besitzt. In [2] wurden Methoden entwickelt, die das Auffinden und Begründen solcher *Vermutungen* ermöglichen.

Klaus Schlüter, Stuttgart

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 Michael Goldberg: The packing of equal circles in a square. Math. Mag. 43, 24–30 (1970).
- 2 Klaus Schlüter: Diplomarbeit, Universität Stuttgart.

## Aufgaben

**Aufgabe 798.**  $A_1, A_2, A_3$  seien die Ecken eines ebenen Dreiecks  $\Delta$ . Auf den Verlängerungen seiner Seiten seien die Punkte  $U_1, \dots, U_6$  folgendermassen angenommen:

$$\begin{array}{lll} U_1, U_4 & \text{auf} & A_2A_3, & |A_2U_1| = |A_1A_2|, & |A_3U_4| = |A_3A_1|, \\ U_2, U_5 & \text{auf} & A_3A_1, & |A_3U_5| = |A_2A_3|, & |A_1U_2| = |A_1A_2|, \\ U_3, U_6 & \text{auf} & A_1A_2, & |A_1U_3| = |A_3A_1|, & |A_2U_6| = |A_2A_3|. \end{array}$$

Ferner seien  $V_1, V_2, V_3$  bzw.  $W_1, W_2, W_3$  die Mittelpunkte der Seiten  $\overline{U_2 U_3}, \overline{U_1 U_6}, \overline{U_4 U_5}$  bzw.  $\overline{U_5 U_6}, \overline{U_3 U_4}, \overline{U_1 U_2}$  des so entstehenden Sechsecks  $U_1 \cdots U_6$ .

- a) Man zeige, dass sich die Transversalen  $A_i V_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) in einem Punkt  $L$  und die Transversalen  $A_i W_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) in einem Punkt  $P$  schneiden.
- b) Man zeige, dass  $L, P$  und der Inkreismittelpunkt  $I$  von  $\Delta$  kollinear sind.
- c) Man bestimme den Wertebereich des Teilungsverhältnisses  $|LI|/|IP|$ .

J. T. Groenman, Groningen, NL

Lösung: Es seien  $a_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) die Seitenlängen von  $\Delta$ ,  $O$  ein Bezugspunkt ausserhalb der Ebene von  $\Delta$  und  $\mathbf{b}_i = \overrightarrow{OA_i}$  die Basisvektoren eines räumlichen Koordinatensystems. Da jede Winkelhalbierende von  $\Delta$  die Gegenseite innen im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, ist

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_1 \mathbf{b}_1 + a_2 \mathbf{b}_2 + a_3 \mathbf{b}_3}{a_1 + a_2 + a_3}.$$

Die drei Vektoren

$$\mathbf{b}_i - x_i \overrightarrow{A_i V_i} = \mathbf{b}_i - x_i (a_j/2 a_k) (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j) - x_i (a_k/2 a_j) (\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_k)$$

$(i, j, k = 1, 2, 3 \text{ im Zyklus})$

sind für

$$x_i = 2 a_j a_k / (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OL} = \frac{a_1^2 \mathbf{b}_1 + a_2^2 \mathbf{b}_2 + a_3^2 \mathbf{b}_3}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Daher gehen die Geraden  $A_i V_i$  durch den Punkt  $L$ , den Lemoine-Punkt von  $\Delta$ . Die drei Vektoren

$$\mathbf{b}_i + y_i \overrightarrow{A_i W_i} = \mathbf{b}_i + \frac{y_i (a_i + a_j)}{2 a_j} (\mathbf{b}_k - \mathbf{b}_i) + \frac{y_i (a_i + a_k)}{2 a_k} (\mathbf{b}_j - \mathbf{b}_i)$$

sind für

$$y_i = a_j a_k / (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)$$

gleich dem Vektor

$$\overrightarrow{OP} = \frac{a_1 (a_2 + a_3) \mathbf{b}_1 + a_2 (a_3 + a_1) \mathbf{b}_2 + a_3 (a_1 + a_2) \mathbf{b}_3}{2 (a_2 a_3 + a_3 a_1 + a_1 a_2)}.$$

Daher gehen die Geraden  $A_i W_i$  durch den Punkt  $P$ . Die Vektoren  $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OP}$  sind komplanar, da die aus ihren Koordinaten gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1(a_2+a_3) & a_2(a_3+a_1) & a_3(a_1+a_2) \end{vmatrix} = 0$$

ist. Somit sind  $I, L, P$  kollinear. Das Längenverhältnis der Vektoren

$$\vec{LI} = \frac{a_1(a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3)\mathbf{b}_1 + \dots}{(a_1 + a_2 + a_3)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)}$$

und

$$\vec{IP} = \frac{a_1(a_2^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_1a_3)\mathbf{b}_1 + \dots}{2(a_1 + a_2 + a_3)(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2)}$$

lässt sich an jeder der drei Koordinaten ablesen und beträgt

$$|LI|/|IP| = 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2)/(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2).$$

Aus den bekannten Dreiecksungleichungen

$$a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2 < a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq 2(a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2)$$

ergibt sich als Wertebereich dieses Verhältnisses

$$1 < |LI|/|IP| \leq 2,$$

mit Gleichheit rechts genau für das gleichseitige Dreieck.

Mária Herbert, Pécs, Ungarn

Weitere Lösungen sandten J. Banning (Dedzjum, NL), K. Grün (Linz, A), L. Kuipers (Mollens VS), O. P. Lossers (Eindhoven, NL), I. Paasche (München, BRD), A. Reuschel (Wien, A).

**Aufgabe 799.** Es sei  $k$  eine natürliche Zahl und  $a$  eine reelle Zahl mit  $a \geq e$ . Man zeige: Zu jeder reellen Zahl  $x$  mit  $x \geq (\log a)^k$  existiert eine natürliche Zahl  $m$  derart, dass

$$\frac{x}{2^{k+1}(\log ax)^k} < m \leq \frac{x}{(\log am)^k}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

**Lösung mit Verschärfung:** Seien  $k, a, x$  beliebig wie in der Aufgabenstellung vorgegeben; wir zeigen dann sogar, dass es ein natürliches  $m$  gibt mit

$$\frac{x}{2}(\log ax)^{-k} < m \leq x(\log am)^{-k}. \quad (1)$$

Da die Funktion  $y(\log ay)^k$  in  $y \geq 1$  streng monoton wächst, bei  $y \rightarrow \infty$  nicht beschränkt bleibt und an der Stelle  $y=1$  gleich  $(\log a)^k \geq 1$  ist, ist die Menge  $N(k, a, x) := \{n \in \mathbf{N} \mid n(\log a)^k \leq x\}$  nicht leer und endlich. Sei  $m$  ihr größtes Element; offenbar genügt es bereits der rechten Ungleichung in (1) und weiter gilt

$$x < (m+1)(\log a(m+1))^k. \quad (2)$$

Wäre  $m+1 \leq x(\log ax)^{-k}$ , so folgte aus (2) und der vorhin festgestellten Monotonie von  $y(\log ay)^k$ , dass  $x < x(\log ax)^{-k}(\log ax - k \log \log ax)^k \leq x$ . Somit ist  $x(\log ax)^{-k} < m+1 \leq 2m$ , was auch die linke Seite von (1) beweist.

P. Bundschuh, Köln, BRD

Eine weitere Lösung sandte H. Harborth (Braunschweig, BRD).

**Aufgabe 800.** Man zeige, dass für alle  $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2} [1 + (-1)^n].$$

S. Gabler, Mannheim, BRD

Lösung: Aus der Identität

$$k!(n-k)!(n+2) = k!(n-k+1)! + (k+1)!(n-k)!$$

$$\text{folgt } \binom{n}{k}^{-1} = \frac{n+1}{n+2} \left\{ \binom{n+1}{k}^{-1} + \binom{n+1}{k+1}^{-1} \right\}.$$

Summiert man über  $k$  von 0 bis  $n$ , so heben sich rechts ersichtlich alle Summanden bis auf den ersten und letzten weg. Dies ergibt unmittelbar die Behauptung.

P. Hohler, Olten  
Problemgruppe Bern

Anmerkung der Redaktion. Verschiedene Einsender bemerkten, dass sich Aufgabe 800 samt Lösung in [1] findet. Ferner wurde von mehreren Lesern auf [2] hingewiesen, wo die allgemeinere Identität

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{x}{k}^{-1} = \frac{x+1}{x+2} \left\{ 1 + (-1)^n \binom{x+1}{n+1}^{-1} \right\}$$

bewiesen wird. Als weitere Verallgemeinerung zeigt L. Hämmerling

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{p+q+n}{p+k}^{-1} = \frac{p+q+n+1}{p+q+n+2} \left\{ \binom{p+q+n+1}{p}^{-1} + (-1)^n \binom{p+q+n+1}{q}^{-1} \right\} \quad \text{für } p, q, n \in \mathbf{N}_0.$$

## LITERATURVERZEICHNIS

- 1 J. Riordan: Combinatorial Identities, S. 28. John Wiley, New York 1928.
- 2 H.W. Gould: Combinatorial Identities, S.18. Morgantown Printing and Binding Co., Morgantown, West Virginia 1972.

Weitere Lösungen sandten P. Addor (Bern), R. Askey (Madison, USA), K. Bickel (Freiburg, BRD), A. Brunnschwiler (Magadino), P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Carlitz (Durham, USA), L. Hafner (Urbana, USA), L. Hämmerling (Aachen, BRD) (3 Lösungen), H. Harborth (Braunschweig, BRD), A.A. Jagers (Enschede, NL), M.S. Klamkin (Edmonton, CDN), M. Koch (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warszawa, Polen), P. Nuesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD) (2 Lösungen), R. Razen (Leoben, A), Hj. Stocker (Wädenswil), J. Suck (Bochum, BRD), G. Turnwald (Wien, A), M. Vowe (Therwil BL), H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. August 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 816.**  $a_1, a_2, \dots, a_s$  seien gegebene positive Zahlen und  $0 < r < 1$ . Die Folge  $(a_n)$  sei durch die Rekursionsformel

$$a_n = (a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_{n-s})^r, \quad n > s$$

bestimmt. Man beweise die Konvergenz von  $(a_n)$  und bestimme ihren Grenzwert.

E. Trost, Zürich

**Aufgabe 817.** Man bestimme alle Polynome  $f$  mit komplexen Koeffizienten, welche der Gleichung  $f(x)f(-x) = f(x^2)$  genügen.

J. Binz, Bolligen

**Aufgabe 818.**  $G_m$  bezeichne die additive bzw. die multiplikative Gruppe aller bzw. aller regulären komplexen  $(m, m)$ -Matrizen,  $Z_n$  die multiplikative Gruppe der komplexen zyklischen Matrizen