

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **34 (1979)**

Heft 5

PDF erstellt am: **25.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 810.**  $D_n$  bezeichne die Menge aller fixpunktfreien Permutationen

$$p_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

von  $n$  Elementen  $1, 2, \dots, n$ . Ferner sei

$$\sigma(p_n) := \sum_{i=1}^n i a_i, \quad \lambda_n := \max \{ \sigma(p_n) ; p_n \in D_n \}.$$

Für jedes  $n \geq 2$  bestimme man  $\lambda_n$ , gebe eine Permutation  $q_n$  mit  $\sigma(q_n) = \lambda_n$  an und berechne die Anzahl  $z_n$  der verschiedenen maximalen Permutationen  $q_n$ .

J. Binz, Bolligen

Lösung: Für jedes  $n \geq 2$  und jede zugelassene Permutation  $p_n$  gilt

$$\sum_{i=1}^n (i - a_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sigma(p_n).$$

Wir bestimmen daher für jedes  $n$  den kleinstmöglichen Wert  $\delta_n$  der Summe  $\sum_{i=1}^n (i - a_i)^2$  und geben alle Permutationen an, für die  $\delta_n$  angenommen wird.

Wegen  $i \neq a_i$  für  $1 \leq i \leq n$  ist sicher  $\delta_n \geq n$ .

Für jedes gerade  $n$  ist  $\delta_n = n$  genau auf die eine Weise

$$q_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & n & n-1 \end{pmatrix}$$

realisierbar.

Für ungerades  $n$  ist

$$\delta_n = (n-1) \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 = n+3$$

bestmöglich, weil die Anzahl der ungeraden  $i$  um 1 grösser ist als die der geraden. Deshalb muss auch die Differenz  $|j - a_j| = 2$  «an ungerader Stelle  $j$ » auftreten.

Für die Randpositionen  $j=1$  bzw.  $j=n$  sind  $a_j=3$  bzw.  $a_j=n-2$  und daher

$$q_n = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n-1 & n \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & \dots & n & n-1 \end{array} \right)$$

bzw.

$$q_n = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & n-4 & n-3 & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & n-3 & n-4 & n-1 & n & n-2 \end{array} \right)$$

notwendig.

Für jeden der Werte  $j=3,5,\dots,n-2$  ergeben die jeweils zwei Möglichkeiten  $a_j=j\pm 2$  als einzige optimale Permutationen

$$q_n = \left( \begin{array}{cccc|cc|ccc} 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j & j+1 & j+2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & j-1 & j-2 & j+2 & j & j+1 & \dots & n & n-1 \end{array} \right)$$

bzw.

$$q_n = \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j & j+1 & j+2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & \dots & j-1 & j & j-2 & j+2 & j+1 & \dots & n & n-1 \end{array} \right).$$

Es gelten also

$$\lambda_n = \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} \delta_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades } n \\ \frac{n+3}{2} & \text{für ungerades } n \end{cases},$$

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{für gerades } n \\ n-1 & \text{für ungerades } n \end{cases}.$$

M. Koch und F. Piefke, Braunschweig, BRD

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), K. Grün (Linz, A), H.J. Kleck (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), R. Razen (Leoben, A), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil), R. Wyss (Flumenthal).

**Aufgabe 811.** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  beweise man

$$2n \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \frac{2^{-2k}}{2n-2k-1} = (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2k}{k} \frac{2^{-2k}}{2n-2k+1}.$$

P. Bundschuh, Köln, BRD

Lösung: Die Behauptung ist offensichtlich gleichbedeutend mit

$$L := \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} 2^{-2k} \left\{ \frac{2n}{2n-2k-1} - \frac{2n+1}{2n-2k+1} \right\} = -(2n+1) \binom{2n}{n} 2^{-2n} =: R.$$

Zufolge der Identität

$$\frac{2n}{2n-2k-1} - \frac{2n+1}{2n-2k+1} = \frac{2k+1}{2n-2k-1} - \frac{2k}{2n-2k+1}$$

lässt sich die linke Seite aber wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 L &= \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} 2^{-2k} \left\{ \frac{2k+1}{2n-2k-1} - \frac{2k}{2n-2k+1} \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{2k+2}{k+1} \frac{(2k+2)2^{-2k-2}}{2n-2k-2+1} - \binom{2k}{k} \frac{(2k)2^{-2k}}{2n-2k+1} \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{2k}{k} \frac{(2k)2^{-2k}}{2n-2k+1} - \sum_{k=0}^n \binom{2k}{k} \frac{(2k)2^{-2k}}{2n-2k+1} \\
 &= - \binom{2n+2}{n+1} (2n+2) 2^{-2n-2} = R.
 \end{aligned}$$

O. P. Lossers, Eindhoven, NL

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), L. Kuipers (Mollens VS), I. Paasche (München, BRD), Hj. Stocker (Wädenswil), M. Vowe (Therwil).

**Aufgabe 812.** Über den Seiten eines ebenen  $k$ -Ecks mit den (zyklisch notierten) Eckpunkten  $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_k^{(1)}$  seien nach aussen gleichseitige Dreiecke  $A_1^{(1)}A_2^{(1)}$ ,  $A_2^{(1)}A_3^{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $A_k^{(1)}A_1^{(1)}$  errichtet. Die Seitenmitten des  $k$ -Ecks  $A_1'A_2' \dots A_k'$  bilden ein  $k$ -Eck  $A_1^{(2)}A_2^{(2)} \dots A_k^{(2)}$ . Durch Wiederholung dieses Prozesses entsteht eine Folge von  $k$ -Ecken  $A_1^{(n)}A_2^{(n)} \dots A_k^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Man untersuche, für welche Werte von  $k$  ( $k \geq 3$ ) diese Folge konvergiert, und bestimme im Konvergenzfall das Grenzpolygon.

W. Moldenhauer, Rostock, DDR

Lösung des Aufgabenstellers (von der Redaktion bearbeitet): Interpretiert man die Punkte  $A_j^{(n)}$  als komplexe Zahlen  $a_j^{(n)}$ , so erhält man leicht die folgende Rekursion:

$$a_{j+1}^{(n+1)} = \frac{1}{2} (\omega a_j^{(n)} + a_{j+1}^{(n)} + \omega^{-1} a_{j+2}^{(n)}), \quad j \bmod k. \quad (1)$$

Dabei ist  $\omega = e^{2\pi i/3}$ . Mittels der komplexen Spaltenvektoren

$$z^{(n)} = (a_1^{(n)}, \dots, a_k^{(n)})^t$$

und der zyklischen Matrix

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \omega^{-1} & 0 & \dots & 0 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \omega^{-1} & 0 & 0 & \dots & \omega & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{zykl}(1, \omega^{-1}, 0, \dots, 0, \omega)$$

lassen sich die Gleichungen (1) zu

$$z^{(n+1)} = A z^{(n)}$$

zusammenfassen. Die gegebene Polygonfolge konvergiert somit genau dann, wenn die Matrixfolge  $(A^n)$  konvergiert, und dem Grenzpolygon entspricht der Vektor

$$z = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} A^n \right) z^{(1)}.$$

Notwendig und hinreichend hierfür ist offenbar die Bedingung  $|\lambda| \leq 1$  für alle Eigenwerte  $\lambda$  von  $A$ . Für diese findet man in geläufiger Weise

$$\lambda_{j+1} = \frac{1}{2} (1 + \omega^{-1} e^{2\pi i j/k} + \omega e^{-2\pi i j/k}) = \frac{1}{2} + \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi j}{k}\right), \quad j=0, \dots, k-1.$$

Die Forderung  $|\lambda_{j+1}| \leq 1$  für  $j=0, \dots, k-1$  ist aber genau für  $k=3$  erfüllt. In diesem Falle ist

$$A^n = 2^{-n} \text{zykl} \left( \frac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}, \quad \frac{2^n - (-1)^n}{3} \omega^{-1}, \quad \frac{2^n - (-1)^n}{3} \omega \right),$$

wie man leicht durch vollständige Induktion bestätigt. Damit ergibt sich der dem Grenzdreieck entsprechende Eckpunktsvektor

$$z = \frac{1}{3} \text{zykl}(2, \omega^{-1}, \omega) z^{(1)}.$$

Man verifiziert unmittelbar, dass es sich dabei um ein reguläres Dreieck handelt. Weitere Lösungen sandten L. Kuipers (Mollens VS) und Hj. Stocker (Wädenswil).

## Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. April 1980* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem...A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, S. 67), Problem 625B (Band 25, S. 68), Problem 645A (Band 26, S. 46), Problem 672A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724A (Band 30, S. 91), Problem 764A (Band 31, S. 44).

**Aufgabe 828.** Man berechne die folgenden Summen in geschlossener Form:

$$S_k := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \prod_{v=1}^k \cot^2 \frac{j_v \pi}{2n+1}; \quad k=1, \dots, n.$$

M. Bencze, Clui-Napoca, Rumänien

**Aufgabe 829.** Unter denselben Voraussetzungen wie in Aufgabe 808 [El. Math. 33, 100 (1978)] zeige man, dass sich die drei Potenzlinien je zweier nicht benachbarter Kreise in einem Punkt  $P$  schneiden. Ferner beweise man, dass im gleichen Viereck dieser Punkt  $P$  mit dem Schnittpunkt der vier konkurrenten Geraden jener Aufgabe zusammenfällt.

Hj. Stocker, Wädenswil

**Aufgabe 830.** Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 3$ ) positive reelle Zahlen mit  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Dann gilt

$$\binom{n}{2}^{-1} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i}{1-x_i} \frac{x_j}{1-x_j} \geq \frac{1}{(n-1)^2}$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1/n$ .

Dies ist zu beweisen.

S. Gabler, Mannheim, BRD

## Literaturüberschau

J. Schärf, H. Schierer und R. Strecha: Die Taschenrechner Texas Instruments SR-50A und SR-51A in Schule und Praxis. 142 Seiten. DM 19.80. Oldenbourg, Wien, München 1977.

Dieses Buch ist eine Ergänzung zu den mit den Rechnern mitgelieferten Handbüchern, welche oft nur in englischer Sprache oder in schlechter deutscher Übersetzung vorliegen. Der Anfänger lernt an den Beispielen im zweiten Teil insbesondere den Gebrauch der Speicher; dies hat zum Ziel, möglichst keine Zwischenresultate aufzuschreiben, um dadurch schneller und sicherer zu rechnen. Von denselben Autoren sind im gleichen Verlag entsprechende Bücher für die Rechner Texas Instruments SR-51-II, TI-30 und SR-40, Hewlett Packard HP-45, HP-25, HP-21, Sanyo CZ-2901 und Privileg SR-54 NC erschienen.

H. Walser

R.L. Long: Algebraic Number Theory. Pure and Applied Mathematics, Volume 41. 208 Seiten. Fr. 62.-. Dekker, New York 1977.

Cet ouvrage, qui est issu d'un cours donné par l'auteur à des étudiants gradués de l'Université de Floride en 1972/73, expose de nombreux résultats de la théorie des nombres algébriques, tant classique que récente, et sa lecture, fort intéressante en soi pour qui a déjà quelques connaissances de ce domaine, peut aussi être une excellente préparation à l'étude de la théorie du corps de classe.

La première partie de ce cours, qui présentait les anneaux de Dedekind, les corps de nombres algébriques et leurs extensions, la ramification, etc. n'est reprise ici que pour mémoire, dans le chapitre I, l'auteur renvoyant pour quelques démonstrations et pour plus de détails au fameux petit livre «Algebraic Theory of Numbers» de P. Samuel. Les chapitres 2 à 5 développent les concepts de localisation, de valeur absolue et de corps  $p$ -adique. On y trouve, entre autres choses, la démonstration de l'inégalité  $\sum e_i f_i \leq n$ , une étude de la structure multiplicative dans les corps  $p$ -adique et le théorème de Dedekind sur la ramification et la différentielle dans le cas global. Le chapitre 6, réunit de nombreux résultats sur les extensions cyclotomiques et abéliennes et comprend, en particulier, une démonstration élémentaire du théorème de Kronecker-Weber. Les chapitres 7 et 8 sont consacrés à l'étude des séries de Dirichlet, des fonctions zêta de Riemann, des fonctions L et à leurs applications aux extensions abéliennes absolues, telles les formules du nombre de classes. Enfin, le chapitre 9 introduit l'étude des extensions galoisiennes comme module sur  $Z[G]$  et  $A[G]$  et se termine par une démonstration du «Spiegelungssatz» de Leopoldt.

Notons encore une bibliographie choisie de livres classiques et d'articles spécialisés, de nombreux exercices en fin de chapitre, dont plusieurs préparent le chapitre suivant et de fréquentes notices historiques qui rendent la lecture attrayante et vivante.

G. Archinard