Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Aufgaben

Aufgabe 795. Man beweise die Identität

$$\sum_{i=0}^{q}\left[\binom{p-1+i}{p-1}-\binom{p-1+i}{p}\right]\left[\binom{m+n-p-i}{m-p}-\binom{m+n-p-i}{n-p-1}\right]$$

$$=\sum_{i=p+1}^{m+1}\left[\binom{q-1+i}{q-1}-\binom{q-1+i}{q}\right]\left[\binom{m+n-q-i}{m-q}-\binom{m+n-q-i}{n-q-1}\right]$$

für alle natürlichen p,q,m,n mit $q\leq p-1\leq m-1$, $q\leq n-1\leq m-1$. Vorausgesetzt sei ferner die Nullkonvention $\binom{s}{t}=0$ für $s<t$ und $t<0$. J. Binz, Bern

1. Lösung des Aufgabenstellers: In einem ebenen Gitter beträgt die Anzahl der Gitterwege minimaler Länge von $(0,0)$ nach (m,n), welche die Gerade $y=x+k$ $(k=0,1,2,\ldots)$ nicht überschreiten,

$$z(m,n,k)=\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+k+1}. \tag{1}$$

Dies legt nahe, die Summen als Gitterwegsanzahlen zu deuten und die Identität auf kombinatorischem Weg zu beweisen. Wir betrachten minimale Gitterwege von $(0,0)$ nach (m,n), welche die Gerade $y=x$ nicht überschreiten und das Rechteck $R=\{(x,y);\ p\leq x\leq m,\ 0\leq y\leq q\}$ treffen. Ihre Anzahl lässt sich auf zwei Arten berechnen:

a) Jeder zulässige Weg trifft R erstmals nach Durchlaufen einer horizontalen Strecke $s_i=\big((p-1,i),\ (p,i)\big)$, $i=0,1,\ldots,q$. Von $(0,0)$ nach $(p-1,i)$ gibt es nach (1) $r=\binom{p-1+i}{p-1}-\binom{p-1+i}{p}$ Wege; von (p,i) nach (m,n) dagegen gehen wiederum nach (1), aber diesmal für $k=p-i$, $t=\binom{m+n-p-i}{m-p}-\binom{m+n-p-i}{m-i+1}$ $=\binom{m+n-p-i}{m-p}-\binom{m+n-p-i}{n-p-1}$ Wege; über s_i gehen somit rt Wege. Summation über $i=1,2,\ldots,q$ ergibt die erste Summe der Aufgabe.

b) Jeder zulässige Weg verlässt R erstmals beim Durchlaufen einer vertikalen Strecke $s_j=\big((p+j,q),(p+j,q+1)\big)$, $j=0,1,\ldots,m-p$. In $(p+j,q)$ enden $u=\binom{p+q+j}{p+j}$ $-\binom{p+q+j}{p+j+1}$ der Wege mit Start in $(0,0)$; in $(p+j,q+1)$ dagegen starten $v=\binom{m+n-p-q-1-j}{m-p-j}-\binom{m+n-p-q-1-j}{m-q}$ Wege nach (m,n), wobei u und v wiederum nach (1) berechnet werden. Setzen wir $p+j+1=i$, so werden $u=\binom{q-1+i}{q}-\binom{q-1+i}{q-1}$ und $v=\binom{m+n-q-i}{n-q-1}-\binom{m+n-q-i}{m-q}$. Über s_j

gehen uv Wege. Summation über $i=p+1, p+2, \ldots, m+1$ ergibt die zweite Summe der Aufgabe.

2. Lösung: Die behauptete Gleichung ergibt sich formal unmittelbar aus der identität

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{k+N-s-1}{k}\binom{M+s-k}{s}=\sum_{j=0}^{s}\binom{j+M-r-1}{j}\binom{N+r-j}{r}$$

(vgl. [1]), indem man der Reihe nach folgende Einsetzungen vornimmt:

1.	$k=i$	$r=q$	$N=m$	$s=m-p$	$M=n$	$j=m+1-i$
2.	$k=i$	$r=q$	$N=n-1$	$s=n-p-1$	$M=m+1$	$j=n-i$
3.	$k=i-1$	$r=q-1$	$N=m+1$	$s=m-p$	$M=n-1$	$j=m+1-i$
4.	$k=i-1$	$r=q-1$	$N=n$	$s=n-p-1$	$M=m$	$j=n-i$

LITERATURVERZEICHNIS

1 L. Carlitz: Note on a binomial identity. SIAM J. math. Analysis *6*, 904 (1975).

R. Razen, Leoben, A

Eine weitere Lösung sandte L. Kuipers (Mollens VS).

Aufgabe 796. Man bestimme die Lösungsmenge der diophantischen Gleichung

$$3^{2x-1}+3^x+1=7^y; \qquad x,y\in\mathbf{N}.$$

L. Kuipers, Mollens VS

Lösung mit Verallgemeinerung: Wir zeigen allgemeiner, dass die diophantische Gleichung

$$1+3^x+3^y=7^z; \qquad x,y,z\in\mathbf{N}_0$$

nur die triviale Lösung $(x,y,z)=(1,1,1)$ besitzt. Wegen der Symmetrie in x und y dürfen wir dabei $y\geqslant x$ voraussetzen.

1. Für $x=0$ wäre $2+3^y=7^z$, aber wegen

$$7^z\equiv 1,7,4 \bmod 9 \quad \text{für} \quad z\equiv 0,1,2 \bmod 3 \tag{1}$$

ist das unmöglich.
2. $x=y=1$ liefert die triviale Lösung.
3. Für $x=1, y>1$ wäre

$$4+3^y=7^z, \tag{2}$$

also $7^z \equiv 4 \bmod 9$, daher nach (1) $z \equiv 2 \bmod 3$, etwa $z = 3n+2$. Ferner ist $7^3 \equiv 1 \bmod 19$, also auch

$$7^{3n} \equiv 1 \bmod 19 \qquad (3)$$

und somit $7^z - 4 = 7^{3n+2} - 4 \equiv 7^2 - 4 \equiv 7 \equiv 3^y \bmod 19$. Nun ist 3 Primitivwurzel mod 19, und man hat $3^y \equiv 7 \bmod 19$ genau dann, wenn $y \equiv 6 \bmod 18$, etwa $y = 18m + 6$. Folglich wäre $4 + 3^y = 2^2 + (3^{9m+3})^2$ eine Summe von zwei teilerfremden Quadratzahlen, und diese ist im Widerspruch zu (2) nicht durch 7 teilbar.

4. Für $y \geqslant x \geqslant 2$ wäre $7^z - 1 \equiv 0 \bmod 9$, nach (1) also $3 \mid z$, und wir hätten wegen (3)

$$3^x(3^{y-x} + 1) = 7^z - 1 \equiv 0 \bmod 19,$$

somit $3^{y-x} \equiv -1 \bmod 19$. Da 3 Primitivwurzel mod 19 ist, ergäbe sich daraus $y - x \equiv 9 \bmod 18$, etwa $y = x + 9 + 18k$, und mod 7 wäre

$$3^y = 3^x \cdot (3^6)^{3k} \cdot 3^9 \equiv 3^x \cdot 3^1 \cdot 3^3 \equiv -3^x,$$

also

$$1 + 3^x + 3^y \equiv 1 \not\equiv 0 \bmod 7:$$

Widerspruch.

E. Teuffel, Korntal, BRD

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht ZH), P. Bundschuh (Köln, BRD), M.C. van Hoorn (Groningen, NL), A.A. Jagers (Enschede, NL), G. Lord (Québec, CDN), O.P. Lossers (Eindhoven, NL), A. Makowski (Warszawa, Polen), W. Moldenhauer (Rostock, DDR), Problemgruppe (Bern), H.J.J. Riele (Amsterdam, NL), Schülerproblemgruppe (Bern), Hj. Stocker (Wädenswil ZH).

Aufgabe 797. Werden in der Zahlenfolge (a_n) mit

$$a_n = [[\sqrt{2n}]\,(\sqrt{2n} - [\sqrt{2n}])], \qquad n \in \mathbf{N}$$

die Glieder a_j mit $j = 2m^2\,(m \in \mathbf{N})$ gestrichen, so gewinnt man eine Folge (b_m). Man berechne das allgemeine Glied b_{n_k} der Teilfolge (b_{n_k}), welche gemäss der Indexvorschrift $n_k = (k+1)(k+2)/2$ gebildet wird. Hj. Stocker, Wädenswil

Lösung: Aus $a_k = b_{k-j}$ für $2j^2 < k < 2(j+1)^2$ folgt, dass die Folge (b_n) durch $b_1 = a_1$ und $b_n = a_{n+m+1}$ für $n_{2m} + 1 \leq n \leq n_{2m+2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ mit der Ausgangsfolge (a_n) verbunden ist. Damit werden insbesondere

$$b_{n_{2m+1}} = a_{2m^2+6m+4} \quad \text{und} \quad b_{n_{2m+2}} = a_{2m^2+8m+7}\,.$$

Nun ist $\sqrt{4m^2+12m+8} = \sqrt{(2m+2)^2+4m+4} = 2m+2+x$ mit $(2m+1)/(2m+2) \le x < 1$ und daher $b_{n_{2m+1}} = [x(2m+2)] = 2m+1$. Analog bekommen wir $\sqrt{4m^2+16m+14} = \sqrt{(2m+3)^2+4m+5} = 2m+3+y$ mit $(2m+2)/(2m+3) \le y < 1$ und daraus $b_{n_{2m+2}} = [y(2m+3)] = 2m+2$. Somit gilt $b_{n_k} = k$.

Problemgruppe Bern

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), H. J. Kleck (Bern), L. Kuipers (Mollens VS), R. Razen (Leoben, A), H. J. J. Riele (Amsterdam, NL), E. Trost (Zürich).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis *10. Juni 1979* an *Dr. H. Kappus*. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit *Problem ... A, B* bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, S. 67), Problem 625 B (Band 25, S. 68), Problem 645 A (Band 26, S. 46), Problem 672 A (Band 27, S. 68), Aufgabe 680 (Band 27, S. 116), Problem 724 A (Band 30, S. 91), Problem 764 A (Band 31, S. 44).

Aufgabe 813. Man beweise, dass für alle natürlichen $n \ge 2$

$$\sum_{\nu=2}^{2n-2} \frac{\nu-3}{2n-\nu}\binom{2n-1}{\nu} B_{2n-\nu} = n-3+\frac{3}{2n}.$$

Dabei bezeichnet B_k die k-te Bernoullizahl.

P. Addor, Bern

Aufgabe 814. Es ist ein analytischer Ausdruck für den Grenzwert $K = \lim K_m$ der Folge (K_m) unregelmässiger Kettenbrüche

$$K_m = \frac{1|}{|2} + \frac{3|}{|4} + \cdots + \frac{2m-1|}{|\;2m} = \cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cdot\cdot\;\cdot+\cfrac{2m-1}{2m}}}$$

anzugeben. Die Lösung soll mit elementaren Mitteln unter Ausschluss der Methode von Cesàro erfolgen.

H.-J. Kaiser, Berlin, DDR
P. Malischewski, Jena, DDR

Aufgabe 815. Ein Kreuz sei die Vereinigungsmenge zweier in derselben Ebene liegenden Rechtecke R_1, R_2. Es gelte zudem die folgende Bedingung (B): Es gibt eine Richtung, zu der alle Rechteckseiten parallel oder senkrecht sind. Aus der Einheitskreisscheibe soll ein Kreuz $K = R_1 \cup R_2$ mit maximaler Fläche ausgeschnitten werden. Man zeige, dass für die Maximalfigur folgende Aussagen gelten:

a) R_1 und R_2 sind kongruent.
b) K teilt die Fläche des dem Kreis umbeschriebenen Quadrates Q nach dem Goldenen Schnitt, $|K|:|Q| = \tau = (\sqrt{5}-1)/2$.
c) Die Seitenlängen von R_1, R_2 stehen im Verhältnis τ.
d) K ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar bei fester Zirkeleinstellung 1.

Aufgabe 815A. Man löse Aufgabe 815 unter Verzicht auf die Bedingung (B).

D. Laugwitz, Darmstadt, BRD

Literaturüberschau

K. Bosch, G. Jordan-Engeln und G.R. Klotz: Statistik. X und 284 Seiten. DM 19,80. Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig 1976.
Das Buch ist zunächst als Begleitmaterial zum ZDF-Studienprogramm «Statistik im Medienverbund» gedacht; dank der breiten, sehr sorgfältigen Darstellung des Stoffes dürfte es auch als Arbeitsbuch für den Selbstunterricht geeignet sein. Inhalt: Begriffswelt der Statistik - Beschreibende Statistik - Wahrscheinlichkeit - Zufallsvariable - Normalverteilung (natürlich in einführender, anschaulicher Behandlung) - Anwendungen (z.B. Schätzen einer unbekannten Wahrscheinlichkeit, Testen einer Hypothese über eine Wahrscheinlichkeit). Die Autoren bemühen sich mit Erfolg, schwierige Begriffsbildungen (z.B. stochastische Unabhängigkeit) sehr verständlich durchzuführen und mit Figuren, Hinweisen auf mögliche Missverständnisse und einfachen Beispielen das Mitkommen zu erleichtern. Aus solchen Bemühungen dürfte auch der Mathematiklehrer, der Wahrscheinlichkeitsrechnung im Unterricht zu behandeln hat, zahlreiche Anregungen für das Vorgehen in der Schule schöpfen. Es scheint dem Rezensenten, die Beispiele hätten noch etwas vielgestaltiger ausgewählt werden dürfen: Münzenwurf und Würfeln können zwar sehr instruktiv sein; sie lassen aber die Bedeutung der behandelten Stoffgebiete manchmal doch zu wenig erkennen. Und beim Testen von Hypothesen müsste wohl noch etwas stärker herausgearbeitet werden, dass die Nullhypothese meistens eine Art «Gegenhypothese» zur Vermutung ist; man will ja die Nullhypothese - wenn's geht - widerlegen! R. Ineichen

H. Kütting: Einführung in die Grundbegriffe der Analysis. Studienbücher Mathematik, Band 1, 207 Seiten, Fr. 20.-; Band 2, 255 Seiten, Fr. 29.50. Herder, Freiburg, Basel, Wien 1973/1977.
Eine weitere Einführung in die Analysis? Ja, aber eine Darstellung, die sich durch etliche Besonderheiten auszeichnet: Die in diesem Gebiet so zahlreichen neuen Begriffe werden sehr sorgfältig motiviert, an zahlreichen Beispielen erläutert und präzis, «modern», aber doch möglichst leicht verständlich, beschrieben; die Beweisführungen sind ausführlich, auf mögliche Schwierigkeiten des Lesers wird geradezu «liebevoll» eingegangen; immer wieder wird durch instruktive Beispiele gezeigt, wo die Grenzen der rein anschaulichen Begriffsbildung liegen; viele Übungsaufgaben mit Lösungen geben die Möglichkeit der Selbstkontrolle. Den Mathematiklehrer wird besonders freuen, dass die Ausführungen sehr «schulnahe» sind: Sie können ihm zahlreiche Anregungen für das Vorgehen im Unterricht der obersten Klassen höherer Schulen geben. Das Buch dürfte aber auch für viele Studierende als Begleittext zu einer Vorlesung sehr nützlich sein. Inhalt: Einführung - Mengen und Abbildungen - reelle Zahlen - Reelle Funktionen - Folgen in metrischen Räumen - Stetige Funktionen - Differentiation reeller Funktionen - Folgen und Reihen - Integration reeller Funktionen. R. Ineichen