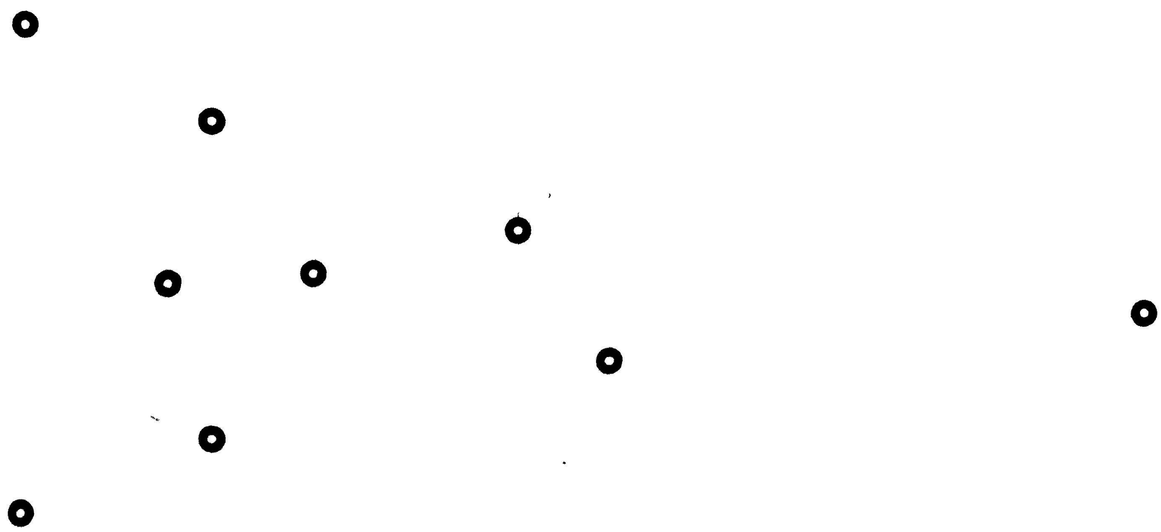
Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen

Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen

Herrn Professor Dr. Dr. h.c. Paul Erdös zum 65. Geburtstag

Es wird die folgende Frage ([1]) gestellt:
Gibt es für jede natürliche Zahl n in der Ebene n Punkte so, dass niemals drei auf einer Geraden liegen und dass jedes durch die Punkte gebildete konvexe Fünfeck mindestens einen weiteren der n Punkte im Inneren enthält?
Ein bekanntes Ergebnis (siehe z.B. [2–6]) sichert die Existenz einer kleinsten Zahl $f(k)$ derart, dass in jeder Punktmenge von $n \geqq f(k)$ Punkten der Ebene (keine drei kollinear) k Punkte zu finden sind, die ein konvexes k-Eck bilden. Es ist $f(k) \geqq 1 + 2^{k-2}$ bewiesen und Gleichheit vermutet worden. Bisher sind jedoch nur $f(3)=3$, $f(4)=5$ und $f(5)=9$ nachgewiesen.
Entsprechend zu $f(k)$ kann nun nach der Existenz einer kleinsten Zahl $g(k)$ gefragt werden, so dass unter $n \geqq g(k)$ Punkten der Ebene (keine drei kollinear) immer k Punkte als konvexes k-Eck so zu finden sind, dass in seinem Inneren keiner der n Punkte liegt. Natürlich muss $g(k) \geqq f(k)$ gelten. Trivial ist $g(3)=3$. Auch $g(4)=5$ ergibt sich unmittelbar. Unter fünf Punkten gibt es nämlich wegen $f(4)=5$ ein konvexes Viereck, das entweder schon leer ist oder den fünften Punkt enthält. Dieser liegt dann auf einer Seite einer Viereckdiagonalen und bildet mit deren Endpunkten und dem auf der anderen Seite liegenden Eckpunkt wieder ein konvexes Viereck, das nun ohne innere Punkte ist. Die Frage nach der Existenz von $g(k)$ bleibt hier für $k \geqq 6$ offen. Durch $g(5)=10$ soll jedoch die eingangs gestellte Frage beantwortet werden.

Satz. *In der Ebene sind unter n Punkten, von denen keine drei kollinear sind, genau für jedes* $n \geqq 10 = g(5)$ *immer fünf Punkte zu finden, die ein konvexes Fünfeck bilden, das im Inneren keinen der n Punkte enthält.*



Beweis: Die neun Punkte der Figur bestätigen $g(5) \geqq 10$. – Nun sei X_n für $n \geqq 10$ eine Punktmenge von n Punkten (keine drei kollinear). Wegen $f(5)=9$ gibt es in

X_n ein konvexes Fünfeck. Liegen m der n Punkte im Inneren und gilt $m \geqq 2$, so soll durch zwei der m inneren Punkte eine Gerade gelegt werden. In einer Halbebene liegen dann mindestens drei der Eckpunkte des Fünfecks. Diese bilden zusammen mit den zwei Punkten auf der Geraden wieder ein konvexes Fünfeck mit nun höchstens $m-2$ inneren Punkten. Nach endlich vielen Schritten ergibt sich ein konvexes Fünfeck $F=\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ mit keinem (wie behauptet) oder genau einem inneren Punkt M. Es bedeutet im weiteren $\{U, V, W, \ldots\}$ ein Vieleck, dessen Eckpunkte links herum, nacheinander $U, V, W, \ldots$ sind. Ausserdem bezeichnen UV die von U nach V gerichtete Gerade durch die Punkte U und V und (UV) die Halbebene rechts von UV. Indizes sollen modulo 5 gleich sein.
Nur wenn alle fünf Vierecke $G_i=\{M, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\}$ konvex sind, ist nicht schon im Inneren von F ein leeres konvexes Fünfeck. Weitere Punkte von X_n können nur noch in einem der fünf Bereiche $A_i=(P_iM)\cap(P_iP_{i+1})\cap(MP_{i+1})$ liegen. Ein Punkt in $A_i\cap(P_iP_{i-1})$ oder in $A_i\cap(P_{i+2}P_{i+1})$ mit kürzestem Abstand zu P_iP_{i+1} bildet mit G_{i-1} oder G_i ein leeres konvexes Fünfeck. Daher sei Q_i ein Punkt von X_n, der in $B_i=A_i\cap(P_{i-1}P_i)\cap(P_{i+1}P_{i+2})$ liegt und kürzesten Abstand d_i zu P_iP_{i+1} hat. Ein Punkt in $B_i\cap(Q_iP_i)$ oder in $B_i\cap(P_{i+1}Q_i)$ mit kürzestem Abstand zu $P_iP_{i+1}(\geqq d_i)$ bildet zusammen mit $\{Q_i, P_{i+1}, M, P_i\}$ ein leeres konvexes Fünfeck. Es sei nun S_i ein zweiter Punkt von X_n, der deshalb in $C_i=B_i\cap(P_iQ_i)\cap(Q_iP_{i+1})$ liegt und der den zweitkürzesten Abstand e_i von P_iP_{i+1} hat $(e_i>d_i)$. Ein dritter Punkt T_i von X_n in A_i liegt nun ohne Einschränkung in $C_i\cap(Q_iS_i)$ und hat einen Abstand $\geqq e_i$ von P_iP_{i+1}. Wird T_iP_i um T_i nach links gedreht, so sei U der erste von T_iP_i in A_{i-1} vor P_{i-1} erreichte Punkt von X_n, oder U sei P_{i-1} selbst, wenn kein Punkt vorher in A_{i-1} erreicht wurde. Dann ist $\{T_i, S_i, Q_i, P_i, U\}$ leer und konvex. - Sind also mehr als zwei Punkte von X_n in einem A_i, so gibt es immer ein konvexes Fünfeck mit Eckpunkten aus X_n ohne innere Punkte von X_n. An dieser Stelle ist also schon $g(5)\leqq 17$ bewiesen.
Etwa in A_i liegen nun genau zwei Punkte von X_n, nämlich Q_i und S_i (wie oben in B_i und in C_i). Sind die konvexen Vierecke $H_1=\{S_i, Q_i, P_i, P_{i-1}\}$ und $H_2=\{Q_i, S_i, P_{i+2}, P_{i+1}\}$ beide ohne innere Punkte von X_n, so bilden H_1 zusammen mit einem weiteren Punkt von X_n, der in $(Q_iS_i)\cap(B_{i+1}\cup B_{i-1}\cup B_{i-2})$ liegt und kürzesten Abstand zu $P_{i-1}S_i$ hat, oder entsprechend H_2 zusammen mit einem weiteren Punkt von X_n, der in $(S_iQ_i)\cap(B_{i-1}\cup B_{i+1}\cup B_{i+2})$ liegt und kürzesten Abstand zu S_iP_{i+2} hat, ein leeres konvexes Fünfeck. Es muss mindestens einen solchen weiteren Punkt von X_n geben, da alle Bereiche $B_j, j \neq i$, ganz erfasst sind und da $n\geqq 10$.
Liegt nun ohne Einschränkung etwa in H_1 der Punkt Q_{i-1} von X_n, dann kann in H_2 kein Punkt von X_n liegen, denn S_i aus B_i ist im Fall $H_1\cap B_{i-1}\neq\emptyset$ notwendig in $(P_{i-2}P_{i-1})$ und im Fall $H_2\cap B_{i+1}\neq\emptyset$ notwendig in $(P_{i+2}P_{i-2})$, was im Widerspruch zu $B_i\cap(P_{i-2}P_{i-1})\cap(P_{i+2}P_{i-2})=\emptyset$ steht. Wie oben ergibt dann ein Punkt in $B_{i-1}\cap(S_iQ_i)$, in B_{i+1} oder in B_{i+2}, der kürzesten Abstand zu S_iP_{i+2} hat, zusammen mit H_2 ein leeres konvexes Fünfeck.
Ausser in $B_{i-1}\cap(S_iQ_i)$ kann nun S_{i-1} noch in $C_{i-1}\cap(Q_{i-1}S_i)$ oder in $C_{i-1}\cap(S_iQ_{i-1})$ liegen. Im ersten Fall ist $\{S_{i-1}, S_i, Q_i, P_i, Q_{i-1}\}$ und im zweiten Fall $\{S_i, S_{i-1}, Q_{i-1}, P_{i-1}, P_{i-2}\}$ ein leeres konvexes Fünfeck, weil kein weiterer Punkt von X_n in B_{i-1} liegt und weil $(S_iP_{i-2})\cap B_{i-2}=\emptyset$ [das zweite Fünfeck liegt ganz in $\{S_i, P_{i+2}, P_{i-2}\}$,

aber B_{i-2} liegt in $(P_{i+2}P_{i-2})$]. Liegt schliesslich nur Q_{i-1} in B_{i-1} (und in H_1), so bildet $\{Q_{i-2}, S_i, Q_{i-1}, P_{i-1}, P_{i-2}\}$ ein leeres konvexes Fünfeck. - Es ist damit jetzt $g(5) \leqq 12$ bewiesen, da zwei Punkte von X_n in einem A_i immer mindestens ein konvexes Fünfeck ohne innere Punkte von X_n zur Folge hatten.

Wegen $n \geqq 10$ kann zum Abschluss nun etwa in B_{i+2}, B_{i+1}, B_i und B_{i-1} jeweils genau ein Punkt Q_{i+2}, Q_{i+1}, Q_i und Q_{i-1} von X_n angenommen werden. Sowohl B_{i+2} als auch B_{i-1} liegen ganz in $(P_{i-2}P_{i-1})$. Da G_{i+1} und G_{i-1} konvex sind, liegen B_{i+2} ganz in $(P_{i+1}M)$ und B_{i-1} ganz in (MP_{i+1}). Von Q_iQ_{i+1} wird MP_{i+1} in $(P_{i-1}P_{i-2})$ geschnitten, so dass ohne Einschränkung etwa B_{i-1} ganz in (Q_iQ_{i+1}) liegt und dann $\{Q_i, Q_{i+1}, P_{i+1}, P_i, Q_{i-1}\}$ ein leeres konvexes Fünfeck bildet. - Damit gilt $g(5) \leqq 10$, und der Satz ist bewiesen.

Heiko Harborth, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

1 P. Erdös: Briefliche Mitteilung.
2 P. Erdös: On some problems of elementary and combinatorial geometry. Annali Mat., series IV, V, *103*, 99-108 (1975).
3 P. Erdös und G. Szekeres: A combinatorial problem in geometry. Compositio Math. *2*, 463-470 (1935).
4 P. Erdös und G. Szekeres: On extremum problems in elementary geometry. Ann. Univ. Sci. Budapest *3*, 53-62 (1960).
5 J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: On the maximum number of coplanar points containing no convex n-gons. Unveröffentlichtes Manuskript.
6 J.D. Kalbfleisch, J.G. Kalbfleisch und R.G. Stanton: A combinatorial problem on convex n-gons. In: Proc. Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, S. 180-188. Baton Rouge 1970.

Aufgaben

Aufgabe 792. Man zeige, dass die folgende Konstruktionsaufgabe allgemein nicht mit Zirkel und Lineal lösbar ist: Ein Dreieck aus den gegebenen Seiten b und c zu konstruieren, welches die Eigenschaft hat, dass die Seitenhalbierende von a, die Höhe auf b sowie die Winkelhalbierende von C konkurrent sind.

E. Trost, Zürich
H. Kappus, Rodersdorf

Lösung: Die in der Aufgabe genannte Konkurrenzbedingung werde kurz «Bedingung P» genannt. Wählen wir das kartesische Koordinatensystem so, dass

$$A=(b,0), \qquad B=(p,q), \qquad C=(0,0) \quad \text{mit} \quad b,p,q>0,$$

so lauten die Gleichungen für die die Strecken h_b, s_a, w_γ enthaltenden Geraden: