Polyederfunktionale, die nicht translationsvariant, aber injektiv sind

Autor(en): **Kirsch, Arnold**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 5

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32943

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. Band 33 Heft 5 Seiten 105-128 10. September 1978

Polyederfunktionale, die nicht translationsinvariant, aber injektiv sind

Herrn Professor H. Hadwiger zum 70. Geburtstag

Im folgenden sei $\mathfrak{R}$ zunächst die Menge aller *eigentlichen Polygone*, d.h. die Menge aller Vereinigungen von je endlich vielen abgeschlossenen und nicht entarteten Dreiecken. Offenbar ist $\mathfrak{R}$ abgeschlossen bzgl. Vereinigungsbildung, nicht aber bzgl. Durchschnitts- und Differenzbildung. Versteht man jedoch die letztgenannten Operationen, in «unbewusster Abstraktion» (G. Aumann [1]), wie folgt:

$A \cap' B =$ abgeschlossene Hülle des offenen Kerns von $A \cap B$,

$A \setminus' B$ = abgeschlossene Hülle von $A \setminus B$,

dann ist ($\mathfrak{R}$, $\cup$, $\cap'$, $\setminus'$), kurz $\mathfrak{R}$, ein abschnittskomplementärer distributiver Verband[1]) (mit Nullelement $\emptyset$, ohne Einselement); d.h. $\mathfrak{R}$ ist abgeschlossen bzgl. der beschriebenen Operationen, und es gelten die vertrauten Regeln der Mengenalgebra.

Ein *Inhaltsfunktional* (oder: eine Inhaltsmasszahl) auf der Menge $\mathfrak{R}$ ist nach H. Hadwiger [2] eine Abbildung Φ von $\mathfrak{R}$ in $\mathbf{R}$, die *translationsinvariant* ist und darüber hinaus

einfach additiv: $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$, falls $A \cap' B = \emptyset$;

(nichtnegativ-)*definit*[2]): $\Phi(A) \geq 0$;

normiert: $\Phi(Q) = 1$ (Q das Einheitsquadrat).

Wir zeigen nun, dass man bei Verzicht auf Translationsinvarianz *injektive* Funk-

1) Hierzu etwa H. Hermes: Einführung in die Verbandstheorie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955 (insb. S. 48, 49).
2) Infolge der Beschränkung auf eigentliche Polygone ist Φ sogar positiv definit, d.h. aus $\Phi(A) = 0$ folgt $A = \emptyset$.

tionale auf $\mathfrak{R}$ angeben kann, die alle übrigen Eigenschaften eines Inhaltsfunktionals haben. Mit anderen Worten, wir beweisen den

Satz. *Es gibt injektive Abbildungen Φ von $\mathfrak{R}$ in* **R**, *die einfach additiv, definit und normiert sind.*

Zur *Vorbereitung* des Beweises erinnern wir an die Arbeit [1], in der (zur Illustration des Darstellungssatzes von Stone) zwei elementare Darstellungen von $\mathfrak{R}$ als *Mengenverbände,* also mit ungeänderter Bedeutung der Mengenoperationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$ gegeben werden. Im Gegensatz zu G. Aumann interessiert uns primär diejenige Darstellung, bei der die Mengen, welche die eigentlichen Polygone[3]) repräsentieren, selbst *Punktmengen* sind: Dabei besteht für $A \in \mathfrak{R}$ die repräsentierende Menge A^φ aus allen inneren Punkten von A und (falls $A \neq \emptyset$) den Punkten derjenigen Randstrecken von A, deren nach innen weisende Normalen einen Richtungswinkel zwischen 0 einschliesslich und π ausschliesslich haben; in ähnlicher Weise wird über die Eckpunkte verfügt ([1], S. 26, 27). Diese Darstellung φ ist, wie man sich nach [1] «leicht überlegt», ein Isomorphismus von $\mathfrak{R}$ auf einen Punktmengenverband. Natürlich gilt $\emptyset^\varphi = \emptyset$. Man beachte ferner, dass im Falle $A \neq \emptyset$ das eigentliche Polygon A und damit auch die Punktmenge A^φ innere Punkte besitzt.

Zum *Beweis* des Satzes wählen wir eine abzählbare, in der Ebene dicht liegende Menge D von Punkten $x_1, x_2, \ldots$ (wobei $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$). Sodann definieren wir für jedes Polygon $A \in \mathfrak{R}$:

$$\Phi(A) = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}, \quad \text{mit} \quad c = \sum_{x_i \in Q^\varphi} 2^{-i}.$$

Da in Q^φ jedenfalls Punkte von D liegen, ist c streng positiv und die Zahl $\Phi(A)$ wohldefiniert. Es gilt $\Phi(\emptyset) = 0$. Im Falle $A \neq \emptyset$ enthält A^φ innere Punkte und folglich unendlich viele Punkte aus D; die angeschriebenen Summen sind dann also unendliche Reihen mit streng positiven Gliedern.
Offenbar ist das Funktional Φ definit und normiert. Auch die *einfache Additivität* ist sofort zu sehen: Für A, $B \in \mathfrak{R}$ mit $A \cap' B = \emptyset$ hat man $(A \cup B)^\varphi = A^\varphi \cup B^\varphi$ und $A^\varphi \cap B^\varphi = (A \cap' B)^\varphi = \emptyset^\varphi = \emptyset$, also

$$\Phi(A \cup B) = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi \cup B^\varphi} 2^{-i} = c^{-1} \sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i} + c^{-1} \sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i} = \Phi(A) + \Phi(B).$$

Nun zur *Injektivität:* Es sei $A \neq B$, also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $A \setminus' B \neq \emptyset$. Dann enthält die Menge $(A \setminus' B)^\varphi = A^\varphi \setminus B^\varphi$ innere Punkte, also auch Punkte aus D. Es folgt $(A^\varphi \setminus B^\varphi) \cap D = (A^\varphi \cap D) \setminus (B^\varphi \cap D) \neq \emptyset$, also $A^\varphi \cap D \neq B^\varphi \cap D$. Das bedeutet: Die Summen $\sum_{x_i \in A^\varphi} 2^{-i}$ und $\sum_{x_i \in B^\varphi} 2^{-i}$ stimmen nicht in allen Gliedern überein und haben folglich verschiedene Werte. Hierzu beachte man, dass diese

3) Bei Aumann: Die «elementargeometrischen Figuren».

Summen als nichtabbrechende (oder identisch verschwindende) Dualbrüche interpretierbar sind: Zwei solche haben verschiedene Werte, sobald sie nicht an allen Stellen übereinstimmen. Somit folgt $\Phi(A) \neq \Phi(B)$.

Als eine bemerkenswerte *Konsequenz* des hiermit bewiesenen Satzes erwähnen wir: Φ ist wegen der Definitheit und Additivität monoton: d.h. aus $A \subset B$ ($\subset$ bezeichne die strenge Inklusion) folgt jedenfalls $\Phi(A) \leq \Phi(B)$. Wegen der Injektivität folgt nun weiter $\Phi(A) < \Phi(B)$; d.h. Φ ist *streng monoton*. Nach Vorgabe von Φ ist somit durch $A \prec B \Leftrightarrow \Phi(A) < \Phi(B)$ eine *strenge lineare Ordnung* $\prec$ *in* $\mathfrak{R}$ definiert, welche die bereits vorhandene (nicht lineare) Ordnungsrelation $\subset$ in $\mathfrak{R}$ respektiert: Aus $A \subset B$ folgt $A \prec B$. Damit ist eine bekannte Existenzaussage (die Fortsetzbarkeit jeder Ordnung zu einer linearen Ordnung) für den speziellen Fall der Inklusion eigentlicher Polygone in einer sehr konkreten Weise, gleichsam mittels «Punktbewertung» (hierzu [3, 4]), nachgewiesen.

Im Hinblick auf die Überschrift dieser Note sei schliesslich bemerkt, dass unsere Überlegungen gültig bleiben, wenn $\mathfrak{R}$ die Menge aller *eigentlichen Polyeder*, für beliebige Dimension k, bedeutet. Hierfür hat man sich nur klarzumachen, dass auch in diesem Fall ein Isomorphismus φ von $\mathfrak{R}$ auf einen Punktmengenverband existiert, derart dass mit jedem nichtleeren Polyeder A aus $\mathfrak{R}$ auch A^{φ} innere Punkte besitzt.

Arnold Kirsch, Kassel

LITERATURVERZEICHNIS

1 G. Aumann: Sind die elementargeometrischen Figuren Mengen? El. Math. *7*, 25-28 (1952).
2 H. Hadwiger: Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.
3 A. Kirsch: Lässt sich jede «gerechte» Rangordnung durch eine Punktbewertung erzeugen? Math.-Phys. Semesterber. *15*, 94-101 (1968).
4 A. Kirsch: «Gerechte» lineare Ordnungen und Punktbewertungen. Der Mathematikunterricht *15*/1, 64-84 (1969).

Rektifizierbare vierdimensionale Simplices

Herrn Prof. H. Hadwiger zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Übersicht

Zwei eigentliche Polyeder A, B heissen *zerlegungsgleich*, geschrieben $A \sim B$, wenn sie im Sinne der Elementargeometrie in Teilpolyeder $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ so zerlegt werden können, dass A_i mit B_i kongruent ist (für $i = 1, \ldots, n$). Insbesondere nennen wir mit Goldberg [5] jedes Polyeder A, das *zu einem Würfel zerlegungsgleich* ist, *rektifizierbar*. Ein Interesse an der Aufsuchung rektifizierbarer Polyeder liegt