

Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 3

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Es gibt nämlich eine Kurve aus (2) mit $\psi = \text{konst.}$, die in V beginnt und D durchläuft. Gemäss (17) berechnet man x^{**} . Die Achsenparallele $x = x_0^{**}$ ($x_0^{**} > x_D$!) schneidet die Zylinderkurve unten genau einmal. Wegen der Monotonie von x^{**} [mit Hilfe von (17) und (2) zu errechnen] kann rechts von dieser Parallelen keine Kurve aus (2) verlaufen, und somit liegt auch der Enveloppenbogen links. Damit ist die Randeigenschaft der Zylinderkurve bis in sehr grosse Nähe von S bewiesen.

V. Schlussbetrachtung

Der äussere Bildrand unseres Kegelstumpfproblems ist in der vollen Klasse aller konvexen Rotationskörper ohne Bedeutung, sind doch alle Extremalkörper bekannt ([1], § 28). Was aber den inneren Bildrand betrifft, so vermute ich, dass er mit Ausnahme des Bogens SU für die volle Klasse seine Gültigkeit beibehält. Diese Vermutung stützt sich auf ein Teilresultat (Fig. 2) sowie auf gesicherte Extremaleigenschaften von Kegeln³).

H. Bieri, Wabern (Köniz)

3) In einer noch unveröffentlichten Note konnte ich zeigen, dass im Intervall $8/\pi^2 < x \leq 0,842153$ mit $0 < \alpha \leq \alpha^* = 0,431365$ symmetrische Kugellinsen, hernach im Intervall $0,842153 < x \leq 0,857102$ symmetrische Kappenkörper der speziellen Linse mit $\alpha = \alpha^*$ und $0 < \beta \leq 23,528356^\circ$ notwendige Bedingungen für ein Maximum von V erfüllen und somit mit grosser Wahrscheinlichkeit das fehlende Stück des inneren Bildrandes liefern werden.

Kleine Mitteilungen

Über eine Primzahlkongruenz

1. Einleitung

In [1] wird eine Matrix A folgendermassen definiert:

Definition 1.1. p sei eine Primzahl; $A = (a_{ij})$ ist die Matrix, deren Elemente durch folgendes Rekursionsschema gegeben sind:

$$a_{i,1} = i, \quad i = 1, 2, \dots, p-1,$$

$$a_{i,k} = i \sum_{j=1}^i a_{j,k-1}, \quad k > 1 \quad \text{und} \quad i = 1, 2, \dots, p-1.$$

Es wird dann bewiesen:

Theorem 1.2. *Alle Elemente von A unterhalb der Nebendiagonalen sind durch p teilbar.*

Die Autoren fragen nach einem Beweis ihres Satzes unter Benutzung von Matrizenrechnung. In der vorliegenden Note soll ein einfacher Beweis dieser Art mitgeteilt werden.

2. Der Beweis

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p-1 & p-1 & p-1 & & p-1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ \vdots \\ p-1 \end{pmatrix}.$$

Es wird sofort klar, dass die Spalten von A gerade durch $v, Mv, M^2v, \dots, M^{p-2}v$ gegeben sind. Beachtet man, dass v die erste Spalte von A ist, so lässt sich dies auch so ausdrücken: die Spalten von A sind gegeben durch die erste Spalte der Matrizen $M, M^2, M^3, \dots, M^{p-1}$. Da uns die Kongruenzen mod p interessieren, wollen wir die Matrixelemente als Elemente des Primkörpers der Charakteristik p , F_p , auffassen.

Satz 2.1. *M ist (über F_p) diagonalisierbar und hat die $p-1$ verschiedenen Eigenwerte $1, 2, 3, \dots, p-1$.*

Beweis: Für $k=1, 2, 3, \dots, p-1$ ist $\det(M-kI)=0$. Dabei bezeichnet I die $(p-1) \times (p-1)$ -Einheitsmatrix.

Korollar 2.2. $M^{p-1} = I$.

Beweis: M ist aufgrund von 2.1 zu

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 \end{pmatrix}$$

ähnlich, und $M^{p-1} = D^{p-1} = I$.

Wie erwähnt wollen wir auch niedrigere Potenzen von M kennenlernen:

Korollar 2.3. M^k hat Nullen auf und unterhalb der $(p-k)$ ten Subdiagonalen ($k=2, 3, \dots, p-1$).

Beweis: Für $k=p-1$ ist das bereits in 2.2 enthalten. Wir zeigen nun: ist x ein Spaltenvektor mit der Eigenschaft, dass die letzten i Komponenten von Mx gleich 0 sind, so sind die letzten $i-1$ Komponenten von x gleich 0:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix}, \quad Mx = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2(x_1+x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ (p-i-1)(x_1+x_2+\dots+x_{p-i-1}) \\ (p-i)(x_1+x_2+\dots+x_{p-i}) \\ \vdots \\ \vdots \\ (p-1)(x_1+x_2+\dots+x_{p-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{p-i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also $(p-i)(x_1+\dots+x_{p-i})=0$ und somit $x_1+\dots+x_{p-i}=0$; ferner $(p-i+1)(x_1+\dots+x_{p-i}+x_{p-i+1})=0=(p-i+1)x_{p-i+1}$, also $x_{p-i+1}=0$ usw.

Damit ist nun auch Satz 1.2 bewiesen. Durch Betrachtung nicht nur der ersten Spalte in $M, M^2, \dots$ ergeben sich natürlich weitere Resultate, die über 1.2 hinausgehen.

Paul R. Hafner, The University of Auckland, New Zealand

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 L.J. Morley and A. Bishop: A prime congruence theorem. *El. Math.* 32, 91-93 (1977).

Aufgaben

Aufgabe 786. Es seien f, g multiplikative zahlentheoretische Funktionen, ferner

$$F(m) = \sum_{d|m} f(d), \quad G(n) = \sum_{d|n} g(d); \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Zu gegebenen natürlichen Zahlen a, b, m, n bezeichne r bzw. s den grössten Teiler von a bzw. b , welcher relativ prim zu m bzw. n ist. Schliesslich seien φ, ψ zwei durch die Beziehung