Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **33 (1978)**

Heft 1

4 H. Hadwiger: Einige neue Ergebnisse über extremale konvexe Rotationskörper. Abhandlungen aus dem Math. Seminar der Universität Hamburg, Bd. 18 (Dez. 1952).
5 H. Hadwiger: Über eine vollständige Schar extremaler konvexer Rotationskörper. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung *59*, Heft 1, 7–12 (1956).
6 H. Hadwiger: Über eine Ungleichung für drei Minkowskische Masszahlen bei konvexen Rotationskörpern, Monatsh. Math. *56*, 3. Heft (1952).
7 H. Hadwiger: Minkowskische Ungleichungen und nichtkonvexe Rotationskörper. Math. Nachr. *14*, Heft 4/6 (Dez. 1956).
8 H. Hadwiger und H. Bieri: Eine Unstetigkeitserscheinung bei extremalen konvexen Rotationskörpern. Math. Nachr. *13*, Heft 1/2 (Jan./Feb. 1955).
9 H. Hadwiger und H. Bieri: Zum Problem des vollständigen Ungleichungssystems für konvexe Rotationskörper. El. Math. *XII*/5 (1957).
10 H. Bieri: Die wichtigsten Publikationen finden sich in den Fussnoten von [11].
11 H. Bieri: Beitrag zu einem Extremalproblem über konvexe Rotationskörper. Exper. *XIV*, Fasc. 3, 113–116 (15. März 1958).
12 H. Bieri: Extremale konvexe Rotationskörper im V, F, M-Problem des R_3. El. Math. *24*/6 (1969).
13 H. Bieri: Untersuchungen über rotationssymmetrische Kegelstümpfe. Seminario Mat. De Barcelona *VIII* (1955).

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen über Eindeutigkeitsmengen additiver Funktionen

Eine zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ heisst vollständig additiv, wenn für alle $n, m \in \mathbf{N}$ $f(nm) = f(n) + f(m)$ gilt. Nach Kátai [3] nennt man eine Menge A natürlicher Zahlen Eindeutigkeitsmenge vollständig additiver Funktionen (kurz: E-Menge), wenn für jede vollständig additive, zahlentheoretische Funktion $f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ aus $f(A) = \{0\}$ die Gleichung $f(\mathbf{N}) = \{0\}$ folgt. Die Menge $\mathbf{P}$ der Primzahlen ist offenbar eine E-Menge, jede echte Teilmenge von $\mathbf{P}$ dagegen nicht.
Kátai [4] zeigte, dass für ein gewisses $C > 0$ die Menge

$$\{n \in \mathbf{N}, n \leq C\} \cup \{p+1, p \text{ prim}\}$$

E-Menge ist. Elliott [1] wies diese Eigenschaft für die Menge $\{p+1\}$ nach. Indlekofer [2] gab eine Reihe weiterer Beispiele für E-Mengen an.
Es scheint bislang nicht bemerkt worden zu sein, dass E-Mengen auch wie folgt charakterisiert werden können:

Satz. *Eine Menge $A \subset \mathbf{N}$ ist E-Menge genau dann, wenn jedes natürliche n in der Gestalt*

$$n = a_1^{r_1} \cdots a_k^{r_k} \quad (k \in \mathbf{N}_0;\ a_1, \ldots, a_k \in A;\ r_1, \ldots, r_k \text{ rational}) \tag{1}$$

geschrieben werden kann.

Eine unmittelbare Konsequenz hieraus und dem Satz von Elliott ist: Jedes $n \in \mathbf{N}$ kann in der Form

$$n = (p_1 + 1)^{r_1} \cdots (p_k + 1)^{r_k} \quad (k \in \mathbf{N}_0, p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{P}; r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}) \tag{2}$$

dargestellt werden.

Bemerkungen:
1. In (1) und (2) brauchen die einzelnen Faktoren $a_\nu^{r_\nu}$ bzw. $(p_\nu + 1)^{r_\nu}$ keine rationalen Zahlen zu sein, wie das Beispiel

$$2 = (31 + 1)^{3/7} (7 + 1)^{-8/21}$$

zeigt.
2. Die Darstellungen (1) und (2) sind nicht notwendig eindeutig, z. B. ist $2 = (3 + 1)^{1/2} = (7 + 1)^{1/3}$.
3. Im Hinblick auf den nachstehenden Beweis sei gesagt, dass eine vollständig additive Funktion von $\mathbf{N}$ in eindeutiger Weise auf die Zahlenmenge

$$\mathbf{W} = \{x : x = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k};\ k \in \mathbf{N}_0;\ p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{P};\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}\}$$

fortgesetzt werden kann. Da jedes $x \in \mathbf{W}$ genau eine solche Darstellung besitzt, setze man einfach

$$f(x) = r_1 f(p_1) + \cdots + r_k f(p_k).$$

Etwas allgemeiner kann man daher Teilmengen von $\mathbf{W}$ als E-Mengen definieren. Die Forderung

$$f(A) = \{0\} \Rightarrow f(\mathbf{N}) = \{0\}$$

wird dadurch nicht berührt, denn schon aus $f(\mathbf{P}) = \{0\}$ folgt $f(\mathbf{W}) = \{0\}$.

Zum Beweis des Satzes (vereinfacht durch R. Warlimont):
Dass aus (1) die E-Mengen-Eigenschaft folgt, ist klar. Zum Nachweis der umgekehrten Richtung nehmen wir an, es gebe eine E-Menge A_0, für die nicht jedes n gemäss (1) dargestellt werden kann. Wir betrachten den Vektorraum V, der von den Zahlen

$$\log p, \quad p \in \mathbf{P}$$

über dem Körper $\mathbf{Q}$ der rationalen Zahlen aufgespannt wird, d. h. die Menge der Zahlen $\log x$ $(x \in \mathbf{W})$ mit der gewöhnlichen Addition als Vektoraddition. Sei U der Unterraum von V, welcher von den Zahlen

$$\log a, \quad a \in \mathbf{A}_0$$

erzeugt wird. Nach unserer Annahme ist U ein echter Unterraum von V, denn nicht für alle $n \in \mathbf{N}$ existiert eine Darstellung

$$\log n = r_1 \log a_1 + \cdots + r_k \log a_k \quad (a_1, \ldots, a_k \in A_0;\ r_1, \ldots, r_k \in \mathbf{Q}).$$

Jede Basis B_0 von U lässt sich zu einer Basis B von V ergänzen. Durch

$$\varphi(b) = \begin{cases} 0 & \text{für } b \in B_0, \\ 1 & \text{für } b \in B \setminus B_0 \end{cases}$$

wird eine lineare Abbildung von V in $\mathbf{Q}$ definiert, die nicht identisch verschwindet, für die aber $\varphi(U) = \{0\}$ gilt. Da sich für jedes $n \in \mathbf{N}$ genau eine Darstellung

$$\log n = r_1 b_1 + \cdots + r_k b_k \quad (b_1, \ldots, b_k \in B;\ r_k, \ldots, r_k \in \mathbf{Q})$$

finden lässt, wird durch

$$f(n) = r_1 \varphi(b_1) + \cdots + r_k \varphi(b_k)$$

eine vollständig additive Funktion definiert. Es gilt aber

$$f(A_0) = \{0\}, \qquad f(\mathbf{N}) \neq \{0\},$$

was im Widerspruch zur Annahme steht.

Dieter Wolke, TU Clausthal-Zellerfeld

LITERATURVERZEICHNIS

1 P.D.T.A. Elliott: A conjecture of Kátai. Acta Arith. *26*, 11-20 (1974).
2 K.-H. Indlekofer: On sets characterizing additive arithmetical functions. Math. Z. *146*, 285-290 (1976).
3 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions. Acta Arith. *13*, 315-320 (1968).
4 I. Kátai: On sets characterizing number-theoretical functions (II). Acta Arith. *16*, 1-4 (1968).

Aufgaben

Aufgabe 781. $A = (a + md)_{m=0,1,2,\ldots}$ sei eine arithmetische Folge mit $a, d \in N$. Man beweise:

a) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler geometrischer Teilfolgen von A mit ganzzahligen, paarweise teilerfremden Quotienten.

b) Jedes Glied von A ist Anfangsglied unendlich vieler Teilfolgen von A, von denen jede die Partialsummenfolge einer geometrischen Folge mit ganzzahligem Quotienten ist.

J. Binz, Bolligen