

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 5

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

$= [\sigma/M] B + \theta B$  für ein gewisses  $\theta \in \mathbf{R}$  mit  $0 \leq \theta \leq 1$ , wobei wir noch  $\sigma/M - 1 < [\sigma/M] < \sigma/M$  beachten.

Durch Satz 2 wird die Siebmethode anwendbar auf die Folge  $(P(x) + ax : x \geq 0)$ .

In ähnlicher Weise behandelt man andere Folgen wie  $(x a^x : x \geq 0)$  mit  $a \in \mathbf{Z}$ ; statt (6) hat man

$$x_{j,t} a^{x_{j,t}} - b = m z_{j,t} - a^{x_{j,t}} g(a; m) y_{j,t}$$

mit  $m \in \mathbf{N}$ ,  $(m, a) = 1$ .

Für Folgen wie etwa  $(2^x + x^2 : x \geq 0)$  oder  $(x^2 2^x : x \geq 0)$  fehlen uns befriedigende Ergebnisse. Stets ist  $2^x + x^2 \not\equiv 0 \pmod{7}$ .

G. J. Rieger, Technische Universität Hannover

## Kleine Mitteilungen

### Zur Abwicklung des schiefen Kreiskegels

Ein schiefer Kreiskegel, festgelegt durch seinen Basisradius  $r$ , die Höhe  $Z$  und die Exzentrizität  $X > 0$  des Höhenfusspunktes, erfordert bekanntlich zur exakten Verbnung seines Mantels elliptische Integrale [1]. In der Praxis behilft man sich daher mit der Ausbreitung des Mantels einer eingeschriebenen Ersatzpyramide mit hinreichend vielen Kanten. Für die Aneinanderreihung der auftretenden Teildreiecke benötigt man dabei die Längen der Mantelkanten. Obwohl diese «wahren Längen» mit Hilfe der ersten Massaufgabe der darstellenden Geometrie leicht zu ermitteln sind [2], soll hier ein anderes Verfahren auseinandergesetzt werden, das nicht unmittelbar auf der Hand liegt, aber ebenfalls sehr einfach und vielleicht etwas übersichtlicher zu handhaben ist.

Setzt man unter Verwendung kartesischer Koordinaten den Basiskreis  $k$  durch

$$x = r \cos u, \quad y = r \sin u, \quad z = 0 \tag{1}$$

an, so ergibt sich die Entfernung  $R$  eines Basispunktes  $P(x, y, 0)$  von der Kegelspitze  $Q(X, 0, Z)$  in Abhängigkeit vom Parameter  $u$  aus

$$R^2 = (X - r \cos u)^2 + (r \sin u)^2 + Z^2 = X^2 + Z^2 + r^2 - 2rX \cos u. \tag{2}$$

Hieraus ist zu ersehen, dass dieselben Erzeugendenlängen nicht nur auf dem Ausgangskegel vorhanden sind, sondern in gleicher Verteilung auch noch auf unendlich vielen weiteren Kegeln, wenn bloss die Angabestücke den Bedingungen

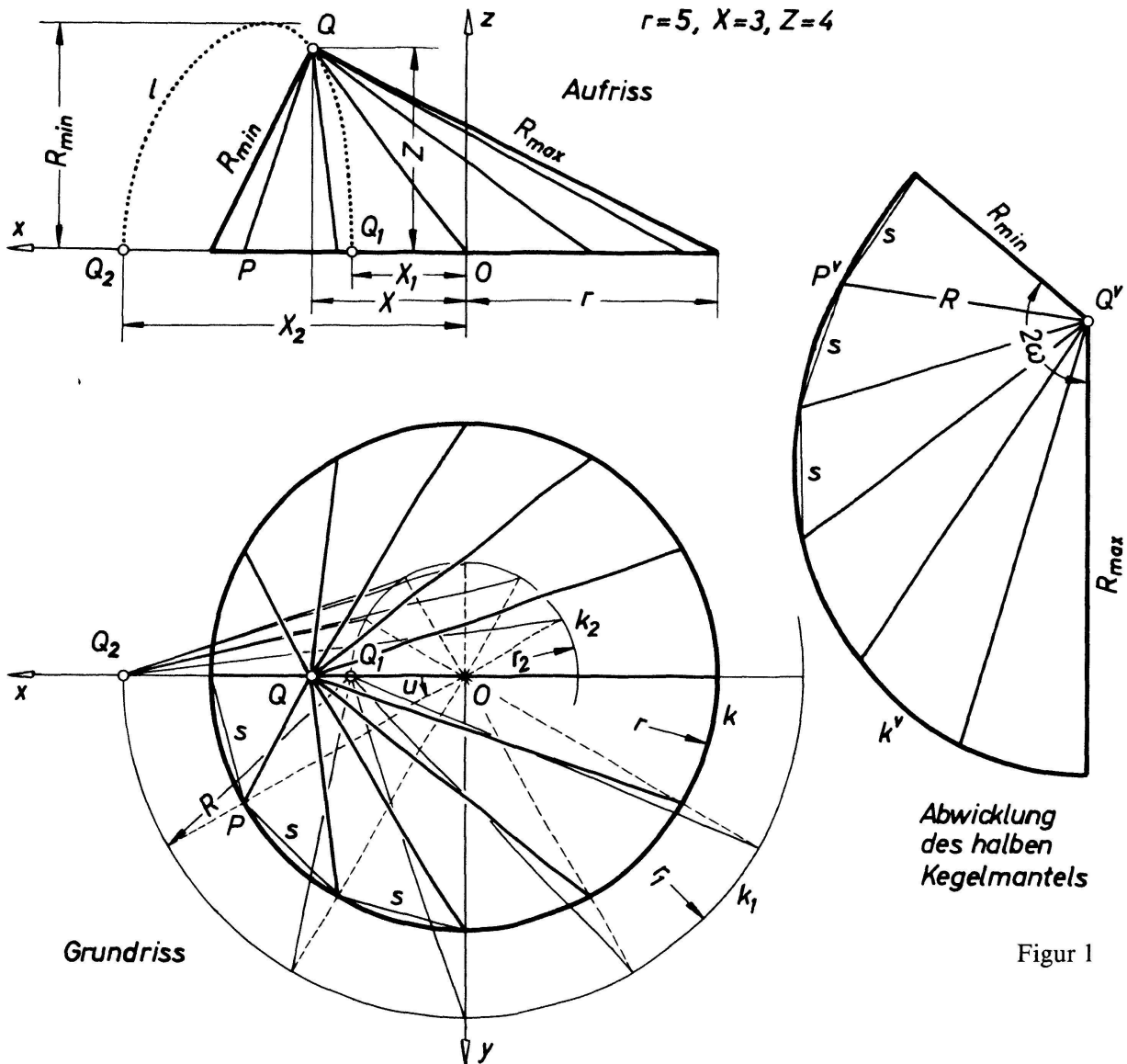
$$rX = a^2, \quad X^2 + Z^2 + r^2 = b^2 \tag{3}$$

mit Konstanten  $a$  und  $b$  genügen.

Zur Veranschaulichung denke man sich ein Modell, bei welchem eine grössere Anzahl von Erzeugenden  $PQ$  durch starre Stäbe materialisiert sind: Sämtliche Fusspunkte  $P$  können dann radial um dasselbe Stück verschoben werden, ohne dass die gelenkig auszuführende Verbindung der Stäbe in  $Q$  stört – was keineswegs von vornherein zu erwarten war. Die Kegelspitze  $Q$  wandert dabei auf einer (unschwer zu konstruierenden) Bahn  $l$ , deren Gleichung sich durch Elimination von  $r$  aus den Bedingungen (3) mit

$$(X^2 + Z^2 - b^2)X^2 + a^2 = 0, \quad Y = 0 \tag{4}$$

ergibt. Damit ist  $l$  als doppelt-symmetrische monozirkulare Quartik zu erkennen, welche im Fernpunkt der  $Z$ -Achse eine isolierte Selbstberührung besitzt; sie besteht aus zwei getrennten Ovalen, von denen ein halbes in Figur 1 eingetragen wurde. Kinematisch liesse sich die Kurve durch eine zentrische Schubkurbel erzeugen. Von Interesse sind die durch  $Z = 0$  gekennzeichneten platten Grenzformen des Kegels. Für die Radien  $r_1$  und  $r_2$  der so gewonnenen Kreisscheiben  $k_1$  bzw.  $k_2$  sowie



Figur 1

für die Abszissen  $X_1$  und  $X_2$  der entsprechenden Grenzlagen  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  der Kegelspitze gelten die Beziehungen

$$r_{1,2} = X_{2,1} = \frac{1}{2} (R_{\max} \pm R_{\min}), \quad (5)$$

wobei  $R_{\min}$  und  $R_{\max}$  zu den Parameterwerten  $u=0$  bzw.  $\pi$  in (2) gehören.

Mit Hilfe dieses Kreises  $k_1$  oder  $k_2$  kann man dann von  $Q_1$  bzw.  $Q_2$  aus die zur Abwicklung des Kegels benötigten Erzeugendenstrecken  $PQ=R$  wie in einem Polar­diagramm abgreifen (Fig. 1). Der Übergang von der Scheibe  $(k_1, Q_1)$  zur Mantelver­ebnung  $(k^\nu, Q^\nu)$  mag dabei als der Vorgang eines sich schliessenden Fächers aufge­fasst werden, der Übergang von  $k_2$  nach  $k^\nu$  als Entfaltung des Fächers. Man ver­gleiche hierzu die bei der Abwicklung des Drehkegels auftretende, durch propor­tionale Änderung der Polarwinkel erklärte Fächertransformation in [2]. – Zur Kon­trolle des gesamten Zentriwinkels  $4\omega$  des Sektors  $(k^\nu, Q^\nu)$  wurden in [1] Nomo­gramme und Näherungsformeln entwickelt.

Die voranstehenden Betrachtungen lassen sich im übrigen auf Kegel mit einem be­liebigen Kegelschnitt  $k$  als Basis verallgemeinern und besitzen dann eine gewisse Bedeutung für ein Trilaterationsproblem der Geodäsie [3]. Das Erzeugendensystem eines solchen Kegels 2. Ordnung gestattet ebenfalls eine einparametrische Deforma­tion, bei welcher der sich affin verändernde Basiskegelschnitt  $k$  innerhalb einer kon­fokalen Schar variiert. Seine Punkte  $P$  wandern dabei auf den konfokalen Kegel­schnitten der Orthogonalschar, während die Kegelspitze  $Q$  im allgemeinen eine Raumkurve  $l$  durchläuft, sofern sie nämlich keiner Symmetrieebene von  $k$  angehört. Diese algebraische Raumkurve  $l$  ist im Falle einer Ellipse oder Hyperbel  $k$  von 12. Ordnung, im Falle einer Parabel  $k$  von 6. Ordnung. Liegt  $Q$  jedoch in genau einer Symmetrieebene von  $k$ , so ist die Spitzenbahn  $l$  eben und von 4. Ordnung im elliptischen oder hyperbolischen Fall, während sie sich im parabolischen Fall auf eine Ellipse reduziert. Befindet sich schliesslich die Kegelspitze  $Q$  auf dem im Basis­mittelpunkt errichteten Lot, dann bleibt sie darauf und ändert bloss die Höhe.

W. Wunderlich, Wien

#### LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W. Wunderlich: Formeln und Rechenbehelfe zur Abwicklung des Kegels 2. Ordnung. Österr. Ingen. Archiv 10, 107–114 (1956).
- 2 W. Wunderlich: Darstellende Geometrie I. Hochschultaschenbücher, Bd. 133, S. 130–134. Mann­heim 1966.
- 3 W. Wunderlich: Une déformation remarquable du système des génératrices d'un cône du second degré et un problème de géodésie. Bull. Inst. Polyt. Jassy (im Druck).

### On Yff's inequality for the Brocard angle of a triangle

If  $a_1, a_2, a_3$  be the angles of a triangle with Brocard angle  $\omega$ , it was conjectured by Yff in 1963 that

$$8\omega^3 \leq a_1 a_2 a_3. \quad (1)$$

A proof was published in this Journal 29, 141–142 (1974), by F. Abi-Khuzam. Subsequently, Bottema, also in this Journal 31, 13–14 (1976), gave a more elementary proof. Here, we give an even simpler proof which also provides an extension of the main lemma used, i. e.,

$$\sin a_1 \sin a_2 \sin a_3 \leq (3\sqrt{3}/2\pi)^3 a_1 a_2 a_3. \quad (2)$$

Since

$$D^2 \log \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \leq 0,$$

$\log[(\sin x)/x]$  is concave in  $(-\pi, \pi]$ . Therefore,

$$\sum_i \omega_i \log \frac{\sin x_i}{x_i} \leq \log \frac{\sin x}{x}$$

where  $\omega_i \geq 0$ ,  $\sum_i \omega_i = 1$ ,  $x = \sum_i \omega_i x_i$ . In particular,

$$\prod_{i=1}^n \frac{\sin x_i}{x_i} \leq \left( \frac{\sin x}{x} \right)^n \quad (3)$$

where  $x = \sum_{i=1}^n x_i/n$  and  $-\pi < x_i < \pi$ , with equality, iff  $x_i = x$ . The rest of the proof is as before and is elementary.

M. S. Klamkin, University of Alberta, Canada

## Elementarmathematik und Didaktik

### Über Spiele mit Quoten

B. GÜNDEL [1], S. 115ff. behandelt in unterhaltsamer Form einfache Beispiele von Glücksspielen, bei denen Geldbeträge ein- und ausgezahlt werden. [3] enthält eine Verallgemeinerung dieser Beispiele; deren Verwendbarkeit für den Mathematikunterricht der Sekundarstufen steht in [4] zur Diskussion. Im Folgenden soll kurz über die den genannten Artikeln zugrunde liegende elementare Theorie der Spiele mit Quoten berichtet werden.

Spiele mit Quoten sind Glücksspiele, denen ein Zufallsversuch  $Z$  mit endlich vielen Ausgängen  $A_1, \dots, A_n$  zugrunde liegt. Die Spieler setzen Geldbeträge auf einen oder mehrere Ausgänge. Setzt ein Teilnehmer den Betrag  $e_k \geq 0$  auf  $A_k$ , so