

Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

Autor(en): **Binz, J.C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32155>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Die Fläche von R wäre demnach mindestens pq , andererseits gilt aber für ein Rechteck mit Seiten p, q exakt $F(R) = pq$. Also muss die Fläche eines Elementardreiecks genau $1/2$ sein.

G. Walther, PH Ruhr, Dortmund

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 W.W. Funkenbusch: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. Amer. Math. Monthly 81, 647-648 (1974).
- 2 R.W. Gaskell, M.S. Klamkin und P. Watson: Triangulations and Pick's Theorem. Mathematics Magazine 49, 35-37 (1976).
- 3 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik I. Stuttgart 1973.
- 4 H. Meschkowski: Grundlagen der euklidischen Geometrie. Mannheim 1966.

Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

In einem ebenen Gitter betrachten wir Gitterwege minimaler Länge von $(0, 0)$ nach (n, m) , wo n und m natürliche Zahlen bedeuten. Alle solchen Wege bestehen aus n horizontalen und m vertikalen Einheitsstrecken und haben die Länge $n+m$. Ihre Anzahl beträgt daher

$$z(n, m) = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Fordern wir zusätzlich, dass die zulässigen Wege die Gerade $g: ky - x = 0$ ($k \in \mathbb{N}$) nicht überschreiten dürfen, so vermindert sich deren Anzahl um die Zahl $v(n, m)$ der Wege, welche g überschreiten. Die Anzahl der zulässigen Wege wird dann $z^*(n, m) = z(n, m) - v(n, m)$.

Offensichtlich ist $z^*(n, m) = 0$ für $n < km$; im folgenden sei deshalb $n \geq km$ vorausgesetzt.

In [1] stellt M. Jeger die Lösung des Problems für $k = 1$ mit Hilfe einer Spiegelungs-idee von D. André [3] auf eine sehr instruktive Art dar; für $k > 1$ versagt das Spiegelungsverfahren, doch beweist er die Gültigkeit einer vermuteten Formel aufgrund der Randwerte 0 auf der Geraden $ky - x - 1 = 0$ und der Randwerte 1 auf der x -Achse mit Hilfe einer Rekursionsformel. In [2] findet sich dann die Lösung mit Verwendung formaler Potenzreihen. Wir stellen uns die Aufgabe, $z^*(n, m)$ direkt mit einer kombinatorischen Idee zu bestimmen. Dazu genügt es, die Anzahl $v(n, m)$ der verbotenen Wege zu berechnen.

Es bedeuten V die Menge der verbotenen Wege von $(0, 0)$ nach (n, m) und M die Menge aller Minimalwege von $(0, 0)$ nach $(n+1, m-1)$. Jeden Weg aus V identifizieren wir mit einer $(n+m)$ -stelligen Folge mit n Gliedern «1» und m Gliedern « $-k$ », wo jede 1 für eine horizontale und jedes Glied $-k$ für eine vertikale Einheitsstrecke des Weges steht. Jeder solchen Folge $f = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$ ordnen wir die «Partialsommen»

$$s_0(f) = 0, s_v(f) = \sum_{i=1}^v x_i$$

zu; es ist dann $s_{n+m}(f) = n - km \geq 0$. Dass f einem verbotenen Weg entspricht, äussert sich jetzt darin, dass für mindestens ein v $s_v(f)$ negativ wird. Sei v die kleinste Nummer, für die $s_v(f) < 0$ ausfällt. Dann sind $x_v = -k$, $s_v(f) = -i$ ($i \in \{1, 2, \dots, k\}$) und $s_{v-1}(f) = -i + k$; $V_i \subset V$ seien die Mengen der verbotenen Wege mit dieser Eigenschaft; es gelten dann $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und

$$V = \bigcup_{i=1}^k V_i.$$

Für ein festes i konstruieren wir jetzt eine Abbildung $\varphi: V_i \rightarrow M$ durch $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{v-1}, -k, x_{v+1}, \dots, x_{n+m}) = (x_{v-1}, \dots, x_1, 1, x_{v+1}, \dots, x_{n+m})$, abgekürzt $\varphi(f) = f'$; d.h. wir ersetzen die Vertikale x_v durch eine Horizontale, kehren die Reihenfolge der vorhergehenden Glieder um und lassen die Reihenfolge der nachfolgenden Glieder bestehen.

Es gelten $s_v(f') = k - i + 1$, $s_{v-1}(f') = k - i$ und $s_{n+m}(f') = n - km + k + 1 \geq k + 1$. Wäre $s_\mu(f') = k - i + 1$, $s_{\mu-1}(f') = k - i$ für ein $\mu < v$, so würde $x_{v-\mu-1} + \dots + x_1 = -1 < 0$, im Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für v . Somit lässt sich f aus f' eindeutig rekonstruieren, φ ist also injektiv. Da zudem für jede beliebige Folge $f'' \in M$ $s_{n+m}(f'') \geq k + 1$ gilt und weil Zunahmen von s_v immer nur um 1 erfolgen, gibt es eine kleinste Nummer μ mit $s_\mu(f'') = k - i + 1$, $s_{\mu-1}(f'') = k - i$. Wie oben ergibt sich daraus die Existenz einer Folge $f \in V_i$ mit $\varphi(f) = f''$; φ ist somit surjektiv. φ ist also eine Bijektion und es gilt $|V_i| = |M|$. Da sich die Überlegungen für jedes i wiederholen lassen, folgt $|V| = k|M|$ und daraus

$$z^*(n, m) = \binom{n+m}{n} - k \binom{n+m}{n+1}.$$

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

- 1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 1, S. 139–146, Stuttgart 1973.
- 2 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 2, S. 72–77, Stuttgart 1976.
- 3 D. André: Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. C.R. Acad. Sci. Paris 105, 436–437 (1887).

Aufgaben

Aufgabe 765. Es sei für reelle $x \geq 2$

$$f^1(x) = f(x) = [\sqrt{x}], f^k(x) = f^{k-1}(f(x)), k = 2, 3, \dots$$

Man bestimme

$$n(x) = \min \{k \in \mathbf{N} \mid f^k(x) = 1\}.$$

R. Wyss, Flumenthal SO