Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

Autor(en): **Binz, J.C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-32155

Die Fläche von R wäre demnach mindestens pq, andererseits gilt aber für ein Rechteck mit Seiten p, q exakt $F(R) = pq$. Also muss die Fläche eines Elementardreiecks genau $1/2$ sein.

G. Walther, PH Ruhr, Dortmund

LITERATURVERZEICHNIS

1 W.W. Funkenbusch: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. Amer. Math. Monthly *81*, 647-648 (1974).
2 R.W. Gaskell, M.S. Klamkin und P. Watson: Triangulations and Pick's Theorem. Mathematics Magazine *49*, 35-37 (1976).
3 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik 1. Stuttgart 1973.
4 H. Meschkowski: Grundlagen der euklidischen Geometrie. Mannheim 1966.

Minimale Gitterwege mit Nebenbedingungen

In einem ebenen Gitter betrachten wir Gitterwege minimaler Länge von $(0,0)$ nach (n,m), wo n und m natürliche Zahlen bedeuten. Alle solchen Wege bestehen aus n horizontalen und m vertikalen Einheitsstrecken und haben die Länge $n+m$. Ihre Anzahl beträgt daher

$$z(n,m) = \binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}.$$

Fordern wir zusätzlich, dass die zulässigen Wege die Gerade $g: ky - x = 0$ $(k \in N)$ nicht überschreiten dürfen, so vermindert sich deren Anzahl um die Zahl $v(n,m)$ der Wege, welche g überschreiten. Die Anzahl der zulässigen Wege wird dann $z^*(n,m) = z(n,m) - v(n,m)$.
Offensichtlich ist $z^*(n,m) = 0$ für $n < km$; im folgenden sei deshalb $n \geq km$ vorausgesetzt.
In [1] stellt M. Jeger die Lösung des Problems für $k = 1$ mit Hilfe einer Spiegelungsidee von D. André [3] auf eine sehr instruktive Art dar; für $k > 1$ versagt das Spiegelungsverfahren, doch beweist er die Gültigkeit einer vermuteten Formel aufgrund der Randwerte 0 auf der Geraden $ky - x - 1 = 0$ und der Randwerte 1 auf der x-Achse mit Hilfe einer Rekursionsformel. In [2] findet sich dann die Lösung mit Verwendung formaler Potenzreihen. Wir stellen uns die Aufgabe, $z^*(n,m)$ direkt mit einer kombinatorischen Idee zu bestimmen. Dazu genügt es, die Anzahl $v(n,m)$ der verbotenen Wege zu berechnen.
Es bedeuten V die Menge der verbotenen Wege von $(0,0)$ nach (n,m) und M die Menge aller Minimalwege von $(0,0)$ nach $(n+1, m-1)$. Jeden Weg aus V identifizieren wir mit einer $(n+m)$-stelligen Folge mit n Gliedern «1» und m Gliedern «$-k$», wo jede 1 für eine horizontale und jedes Glied $-k$ für eine vertikale Einheitsstrecke des Weges steht. Jeder solchen Folge $f = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ ordnen wir die «Partialsummen»

$$s_0(f) = 0, s_\nu(f) = \sum_{i=1}^{\nu} x_i$$

zu; es ist dann $s_{n+m}(f)=n-km\geq 0$. Dass f einem verbotenen Weg entspricht, äussert sich jetzt darin, dass für mindestens ein ν $s_\nu(f)$ negativ wird. Sei ν die kleinste Nummer, für die $s_\nu(f)<0$ ausfällt. Dann sind $x_\nu=-k$, $s_\nu(f)=-i$ ($i\in\{1,2,\ldots,k\}$) und $s_{\nu-1}(f)=-i+k$; $V_i\subset V$ seien die Mengen der verbotenen Wege mit dieser Eigenschaft; es gelten dann $V_i\cap V_j=\emptyset$ für $i\neq j$ und

$$V=\bigcup_{i=1}^{k} V_i .$$

Für ein festes i konstruieren wir jetzt eine Abbildung φ: $V_i\rightarrow M$ durch $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{\nu-1}, -k, x_{\nu+1}, \ldots, x_{n+m})=(x_{\nu-1}, \ldots, x_1, 1, x_{\nu+1}, \ldots, x_{n+m})$, abgekürzt $\varphi(f)=f'$; d.h. wir ersetzen die Vertikale x_ν durch eine Horizontale, kehren die Reihenfolge der vorhergehenden Glieder um und lassen die Reihenfolge der nachfolgenden Glieder bestehen.

Es gelten $s_\nu(f')=k-i+1$, $s_{\nu-1}(f')=k-i$ und $s_{n+m}(f')=n-km+k+1\geq k+1$. Wäre $s_\mu(f')=k-i+1$, $s_{\mu-1}(f')=k-i$ für ein $\mu<\nu$, so würde $x_{\nu-\mu-1}+\cdots+x_1=-1<0$, im Widerspruch zur Minimalitätsbedingung für ν. Somit lässt sich f aus f' eindeutig rekonstruieren, φ ist also injektiv. Da zudem für jede beliebige Folge $f''\in M$ $s_{n+m}(f'')\geq k+1$ gilt und weil Zunahmen von s_ν immer nur um 1 erfolgen, gibt es eine kleinste Nummer μ mit $s_\mu(f'')=k-i+1$, $s_{\mu-1}(f'')=k-i$. Wie oben ergibt sich daraus die Existenz einer Folge $f\in V_i$ mit $\varphi(f)=f''$; φ ist somit surjektiv. φ ist also eine Bijektion und es gilt $|V_i|=|M|$. Da sich die Überlegungen für jedes i wiederholen lassen, folgt $|V|=k|M|$ und daraus

$$z^*(n,m)=\binom{n+m}{n}-k\binom{n+m}{n+1}.$$

J. C. Binz, Universität Bern

LITERATURVERZEICHNIS

1 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 1, S. 139–146, Stuttgart 1973.
2 M. Jeger: Einführung in die Kombinatorik, Band 2, S. 72–77, Stuttgart 1976.
3 D. André: Solution directe du problème résolu par M. Bertrand. C.R. Acad. Sci. Paris *105*, 436–437 (1887).

Aufgaben

Aufgabe 765. Es sei für reelle $x\geqq 2$

$$f^1(x)=f(x)=[\sqrt{x}]\,, f^k(x)=f^{k-1}(f(x))\,,\ k=2,3,\ldots$$

Man bestimme

$$n(x)=\min\{k\in\mathbf{N}\,|\,f^k(x)=1\}.$$

R. Wyss, Flumenthal SO