

# Eine besondere Art gleichseitiger Sechsecke

Autor(en): **Hohenberg, F.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **32 (1977)**

Heft 3

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-32153>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Remark.* It should be noted that a completely different proof of these results may be given by using a result on Dedekind sums due to ROSEN [3].

John B. Friedlander and Kenneth H. Rosen,  
Massachusetts Institute of Technology Cambridge, USA

## REFERENCES

- 1 P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, Teubner, Leipzig, 1902, reprinted: Chelsea, New York, 1968.
- 2 I. NIVEN and H.S. ZUCKERMAN, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 3rd ed., Wiley, New York, 1972.
- 3 K.H. ROSEN, *Congruences for Dedekind Sums*, to appear.

# Elementarmathematik und Didaktik

## Eine besondere Art gleichseitiger Sechsecke

Bei gleichseitigen Streckenzügen, deren Ecken abwechselnd auf zwei konzentrischen Kreisen liegen, gilt eine einfache Winkelbeziehung. Die Umkehrfrage führt in 1. auf besondere Sechsecke. Sie werden in 2. rein algebraisch gefunden. In 3. wird auf ein besonderes Gelenkviereck hingewiesen.

### 1. Definition und Eigenschaften der Sechsecke $\Sigma$

Gegeben seien in der euklidischen Ebene die Kreise  $k_0, k_1$  (Mitten  $K_0, K_1$ , Radien  $r_0, r_1$ , Abstand  $\overline{K_0 K_1} = e$ ). Von einem Punkt  $0$  auf  $k_0$  und einem Punkt  $1$  auf  $k_1$  ausgehend, sei in Abb. 1 der Streckenzug  $\dots -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$  konstruiert, bei dem Nachbarecken den konstanten Abstand  $\overline{v, v+1} = \overline{0, 1} = l$  haben ( $v$  ganz).  $a_v$  sei der (orientierte) Winkel der (orientierten) Geraden  $K_0 K_1$  mit  $K_0 v$  (wenn  $v$  gerade ist) bzw.  $K_1 v$  ( $v$  ungerade).  $\bar{1}, \bar{2}$  seien die Fusspunkte der Normalen aus  $1$  bzw.  $2$  auf  $K_0 K_1$ . Wegen  $\sphericalangle K_1 K_0 1 = (a_0 + a_2)/2$  und  $180^\circ - \sphericalangle K_0 K_1 2 = (a_1 + a_3)/2$  folgt

$$\text{a) } \operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \frac{\bar{1}1}{K_0 \bar{1}} = \frac{r_1 \sin a_1}{r_1 \cos a_1 + e}, \quad \text{b) } \operatorname{tg} \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{\bar{2}2}{K_1 \bar{2}} = \frac{r_0 \sin a_2}{r_0 \cos a_2 - e}. \quad (1a, b)$$

Im Sonderfall  $e=0$  ist  $\operatorname{tg} \frac{a_0 + a_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{a_1}{2}, \dots$ . Es folgt  $a_v - 2a_{v+1} + a_{v+2} \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ .

*Wir stellen nun die Umkehrfrage: Besteht eine lineare Beziehung  $a_v + a_{v+2} = \lambda a_{v+1} + \mu$  mit Konstanten  $\lambda, \mu$  nur bei konzentrischen Kreisen?* Nach (1a) müsste  $(a_0 + a_2) = 2 \arctg \left( \frac{r_1 \sin a_1}{r_1 \cos a_1 + e} \right) = \lambda a_1 + \mu$  für alle  $a_1$  gelten. Hieraus folgt durch zweimalige Differentiation nach  $a_1$ : Für alle  $a_1$  muss  $er_1(r_1^2 - e^2) \sin a_1 / (e^2 + 2er_1 \cos a_1 + r_1^2)^2 = 0$  sein. Wegen  $r_1 \neq 0$  folgt, dass  $e=0$  oder  $e=r_1$  sein muss. Aus (1b) folgt ebenso, dass  $e=0$  oder  $e=r_2$  sein muss. Der Fall

$e=0, \lambda=2, \mu=0$  wurde oben erwähnt. Im zweiten Fall setzen wir  $e=r_0=r_1=r$  und erhalten aus (1a, b)  $\operatorname{tg} \frac{\alpha_0+\alpha_2}{2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha_1}{2}$  und  $\operatorname{tg} \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2} = \operatorname{tg} \left(90^\circ + \frac{\alpha_2}{2}\right)$ , daher  $A_0 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$  und  $A_1 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ , allgemein

$$A_v = \alpha_v - \alpha_{v+1} + \alpha_{v+2} \equiv v \cdot 180^\circ \pmod{360^\circ}.$$

Aus (2) und  $A_{v+1} \equiv (v+1) \cdot 180^\circ \pmod{360^\circ}$  folgt durch Addition

$$B_v = \alpha_v + \alpha_{v+3} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}.$$

Aus (3) und  $B_{v+3} \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$  folgt durch Subtraktion  $\alpha_{v+6} \equiv \alpha_v \pmod{360^\circ}$ .

Daher ist der Streckenzug hier ein geschlossenes gleichseitiges Sechseck  $\Sigma = 012345$ . Nach (3) ist  $\Sigma$  symmetrisch zur Chordalen  $s$  von  $k_0$  und  $k_1$ . In Abb. 2 wurden 0 und 1 gewählt; mit der Seitenlänge  $l = \overline{01}$  wurden daraus die übrigen Ecken 2, 3, 4, 5 von  $\Sigma$  konstruiert. Man könnte auch 0 und 2 wählen; dann ist 1 der von  $K_0$  verschiedene Schnittpunkt von  $k_1$  mit der Streckensymmetrale von 02.

**Bemerkungen.** 1. Es ist a)  $\alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_4 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$  und b)  $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ . Beweis: Nach (2) ist  $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \equiv 0 \pmod{360^\circ}$ , nach (3) ist  $\alpha_1 + \alpha_4 \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ ; durch Addition folgt a). Wegen (3) ist  $(\alpha_0 + \alpha_3) + (\alpha_1 + \alpha_4) + (\alpha_2 + \alpha_5) \equiv 180^\circ \pmod{360^\circ}$ , wegen a) gilt daher b).

2. Den Ecken  $v$  ( $v=0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) von  $\Sigma$  mögen auf  $k_0$  bzw.  $k_1$  die Punkte  $v'$  diametral gegenüberliegen. Zu  $v'$  gehört der Winkel  $\alpha'_v = \alpha_v + 180^\circ$ . (2) und (3) bleiben erfüllt, wenn man z. B. 0 und 3 festhält, aber 1, 2, 4, 5 durch 1', 2', 4', 5' ersetzt. So gehören zu jedem Sechseck  $\Sigma$  drei assoziierte Sechsecke  $\Sigma_0 = 01'2'34'5'$ ,  $\Sigma_1 = 0'12'3'4'5'$ ,  $\Sigma_2 = 0'1'23'4'5$ . Auch  $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  sind gleichseitig, sie haben aber im allgemeinen andere Seitenlängen als  $\Sigma$ . In Abb. 2 ist  $\Sigma_0$  gestrichelt gezeichnet.

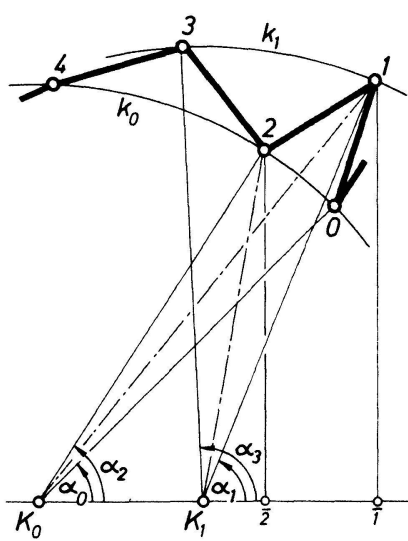


Abb. 1

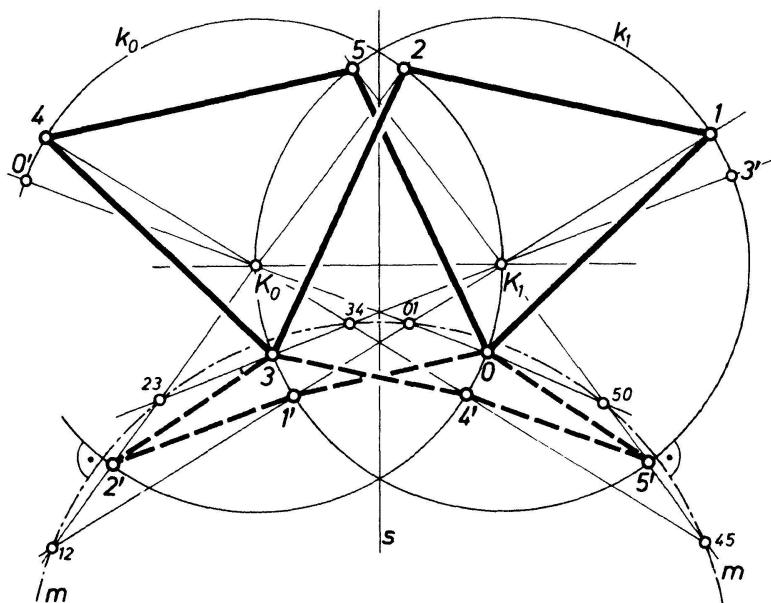


Abb. 2

3. Vergleich mit dem Fall  $e=0$ . Sind  $k_0$  und  $k_1$  konzentrisch und ist  $0$  auf  $k_0$  gewählt, so gibt es *abzählbar* viele Punkte  $1$  auf  $k_1$ , so dass der gleichseitige Streckenzug  $0123 \dots$  sich schliesst;  $a_1 - a_0$  muss nämlich ein rationales Vielfaches von  $360^\circ$  sein. *Aber es gibt nichtabzählbar viele Sechsecke  $\Sigma$* , denn  $0$  auf  $k_0$  und  $1$  auf  $k_1$  kann man beliebig wählen. Auch wenn man (bei gegebenem  $r$ ) die Seitenlänge  $l = \overline{v, v+1}$  vorgibt, existieren nichtabzählbar viele Sechsecke  $\Sigma$ ; ihre Gestalt hängt von  $l$  und von der Wahl von  $0$  auf  $k_0$  ab. Reell können sie nur für  $l \leq 3r$  sein.

4. Die Figur zweier kongruenter Kreise  $k_0, k_1$ , deren Zentralabstand gleich dem Radius ist, ist wegen einer Ponceletschen Schliessungseigenschaft bekannt. Es gibt unendlich viele Vierecke, deren Ecken auf  $k_0$  liegen und deren Seiten  $k_1$  berühren («bizentrische Vierecke»); sie gehen durch Spiegelung an  $s$  in Vierecke mit dem Umkreis  $k_1$  und dem Inkreis  $k_0$  über. Es gibt auch andere Kreispaare mit dieser Eigenschaft<sup>1)</sup>. Durch die projektive Eigenschaft der «involutorischen Ponceletschen Viereckslage» sind also  $k_0, k_1$  noch nicht charakterisiert, wohl aber durch die metrische Forderung, dass bei einem gleichseitigen Streckenzug zwischen zwei nichtkonzentrischen Kreisen eine lineare Beziehung zwischen  $a_v + a_{v+2}$  und  $a_{v+1}$  besteht.

5. Bei anderer Gelegenheit soll gezeigt werden: Wenn man auf eine lineare Winkelbeziehung verzichtet, gibt es zu einem gegebenen Kreis  $k_0$  und zu gegebener Seitenlänge  $l$  unendlich viele Kreise  $k_1$  in der Ebene und im Raum, so dass unendlich viele Sechsecke mit der Seitenlänge  $l$  und mit Ecken  $0, 2, 4$  auf  $k_0$  und  $1, 3, 5$  auf  $k_1$  existieren. Der Fall kongruenter Kreise in einer Ebene, mit  $\overline{K_0 K_1} = r$ , ist dadurch ausgezeichnet, dass hier Sechsecke  $\Sigma$  für *jeden* Wert von  $l$  existieren. (Reell sind sie für  $l \leq 3r$ .)

## 2. Algebraischer Nachweis der Sechsecke $\Sigma$

In 1. wurden die Sechsecke  $\Sigma$  auf Grund einer Winkelbeziehung und mittels zweimaliger Differentiation gefunden. Hier soll rein algebraisch gezeigt werden, dass bei zwei kongruenten Kreisen mit  $\overline{K_0 K_1} = \text{Radius } r$  zu jeder Seitenlänge  $l$  unendlich viele Sechsecke  $\Sigma$  existieren. In Abb. 1 besteht nach Wahl von  $l$  zwischen den Punkten  $0$  von  $k_0$  und  $1$  von  $k_1$  eine (2,2)-Korrespondenz. Für eine bestimmte Lage von  $0$  und  $1$  ergibt sich der Punkt  $2$  linear aus  $1, \dots$ , der Punkt  $6$  linear aus  $5$ . Daher besteht auch zwischen  $0$  und  $6$  eine (2,2)-Korrespondenz. Man kann nach Punkten  $0$  fragen, die mit dem entsprechenden Punkt  $6$  zusammenfallen. In einer rationalen Parameterdarstellung von  $k_0$  mögen  $0$  und  $6$  die Parameterwerte  $t_0$  und  $t_6$  haben. Die Korrespondenz ist durch eine in  $t_0$  und in  $t_6$  quadratische Gleichung dargestellt; die Forderung  $t_6 = t_0$  ergibt eine Gleichung 4. Grades für  $t_0$ . Kann man mehr als vier Wurzeln dieser Gleichung nachweisen, so folgt, dass die Gleichung identisch erfüllt ist und jeder Punkt  $6$  mit  $0$  zusammenfällt (Chasles'sches Korrespondenzprinzip). Im Fall  $r_0 = r_1 = e$  kann man mehr als vier Wurzeln angeben:

a) Die Kreise um  $K_1$  mit den Radien  $|r \pm l|$  schneiden  $k_0$  in vier Punkten; in Abb. 3 sind zwei dieser Schnittpunkte reell, einer ist mit  $0$  bezeichnet.  $l$  sei ein Schnitt-

<sup>1)</sup> R. FELGITSCHER, *Über die Erzeugung von Flächen zweiten Grades durch c-kongruente Ebenenbüschel*, Diss. T.H. Wien 1944, und J. KRAMES, *Über Kegelschnitte in Ponceletscher Viereckslage*, Sitz.-Ber. Öst. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl., Abt. II, 181, 175-201 (1973).

punkt von  $OK_1$  mit  $k_1$ . Die Spiegelung an  $s$  führe  $O$  in  $3$ ,  $l$  in  $2$  über.  $l2$  schneide  $k_0$  noch in  $I$ . Dann ist  $K_0K_1II$  ein Rhombus;  $OK_1K_0$  und  $l2K_0$  sind kongruente gleichschenklige Dreiecke. Daher ist  $\overline{OI} = \overline{l2}$ , und  $0, 1, 2, 3, 4 = 2, 5 = 1$  sind Ecken eines Sechsecks  $\Sigma$ , bei dem  $l2$  und  $45$ ,  $0l$  und  $50$ ,  $23$  und  $34$  sich decken. Damit sind vier Sechsecke gefunden.

b) Abb. 4 zeigt ein fünftes Sechseck.  $0$  und  $3$  seien auf  $K_0K_1$  angenommen,  $0 \neq K_1, 3 \neq K_0$ . Der Kreis um  $0$  mit dem Radius  $l$  schneide  $k_1$  in  $1$  und  $5$ . Die Spiegelung an  $s$  führt  $k_0$  in  $k_1, 0$  in  $3$  über; sie führe  $l$  in  $4, 5$  in  $2$  über. Wegen der Symmetrie gehen  $l2$  und  $45$  durch den Mittelpunkt  $K$  von  $K_0K_1$ . Zu zeigen ist, dass  $\overline{l2} = \overline{45} = l$  ist.  $K_0$  und  $3$  teilen die Strecke  $OK$  innerlich und äusserlich im Verhältnis  $2:1$ , für jeden Punkt  $l$  von  $k_1$  gilt daher  $\overline{OI} = 2 \cdot \overline{KI}$ ; da  $K$  Mittelpunkt von  $l2$  ist, ist  $\overline{l2} = l$ . Analog folgt  $\overline{45} = l$ . Damit ist die Existenz der Sechsecke  $\Sigma$  für beliebige Wahl von  $0$  und  $l$  bewiesen.

c) Auch andere Sechsecke  $\Sigma$  lassen sich unmittelbar erkennen. In Abb. 5 ist  $0=3$  einer der Schnittpunkte von  $k_0$  und  $k_1$ . Der Kreis mit dem Radius  $l$  um  $0=3$  schneide  $k_0$  noch in  $2$  und  $4$ . Die Drehung um  $0=3$  durch  $+60^\circ$  führt  $k_0$  in  $k_1$  über; sie führe  $2$  in  $1$  und  $4$  in  $5$  über. Dann sind  $012$  und  $345$  gleichseitige Dreiecke, und  $012345$  ist ein Sechseck  $\Sigma$ .

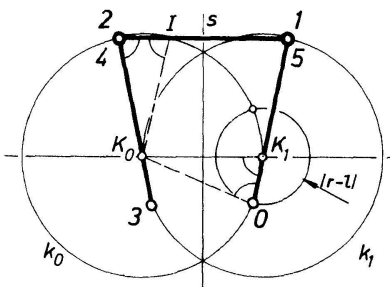


Abb. 3

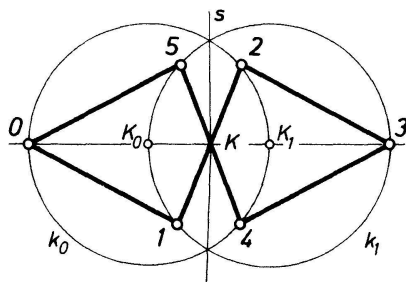


Abb. 4

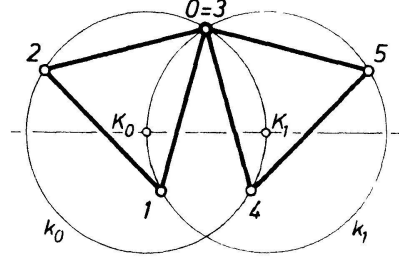


Abb. 5

### 3. Kinematische Deutung der Sechsecke $\Sigma$

Ein Gelenkviereck (Dreistabgetriebe), dessen Arme dieselbe Länge haben wie der Steg  $K_0K_1$ , hat nach 1. die besondere Eigenschaft, dass man aus den Lagen der Koppel unendlich viele gleichseitige Sechsecke  $\Sigma$  bilden kann. Zu jeder Lage der Koppel, etwa  $0, l$ , gehört als Momentanpol  $0l$  der Schnittpunkt der Arme  $K_00, K_1l$ .

Man findet (Abb. 2): a) Vier assoziierte Sechsecke  $\Sigma, \Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$  besitzen dieselben Momentanpole  $0l, l2, 23, 34, 45, 50$ . b) Diese Momentanpole liegen auf einem Kreis  $m$ , der  $k_0$  und  $k_1$  orthogonal schneidet; der Mittelpunkt von  $m$  hat von  $K_0K_1$  den Abstand  $r (\sin^2 a_0 + \sin^2 a_2 + \sin^2 a_4) / 4 \sin a_0 \sin a_2 \sin a_4$ . c) Die Koppellagen (= Seiten aller Sechsecke  $\Sigma$ , die in  $k_0, k_1$  und  $l$  übereinstimmen) umhüllen eine Kurve 6. Klasse.

Zu einer räumlichen Verallgemeinerung gelangt man, wenn man einen der beiden Kreise  $k_0, k_1$  normal zu seiner Ebene verschiebt.  $\Sigma$  ist dann ein räumliches gleichseitiges Sechseck. Die Seiten aller Sechsecke  $\Sigma$ , die  $k_0$  und  $k_1$  und die Seitenlänge  $l$  gemein haben, bilden die Erzeugenden einer Regelfläche 6. Grades vom Geschlecht 1. Ihre Doppelkurve zerfällt in  $k_0, k_1$ , in einen Fernkreis und in eine ebene Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht 1; diese liegt in der Ebene, die durch  $K_0K_1$  geht und normal zu den Ebenen von  $k_0$  und  $k_1$  ist.

F. Hohenberg, Graz