Über gewisse n-komponierbare Graphen

Autor(en): **Bergmann, Horst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 6

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31404

genügen, gibt es ein dreidimensionales konvexes Polyeder mit lauter 3wertigen Ecken, das jeweils f_i konvexe i-Ecke als Seitenflächen besitzt. Nun ist es bezüglich jeder Seitenfläche möglich, ein Schlegel-Diagramm des Polyeders zu zeichnen. Ein Schlegel-Diagramm stellt eine Zerlegung eines konvexen Polygons P in konvexe Polygone P_j dar. Aus dem Theorem von Eberhard folgt also:

Es seien f_i ($i \geq 3$, $i \neq 6$) nicht-negative ganze Zahlen, die der Gleichung (20) genügen, und f_j sei ein nicht-verschwindendes dieser f_i. Dann gibt es dazu ein konvexes j-Eck P, das in konvexe Polygone so zerlegt werden kann, dass die Anzahl der i-Ecke ($i \neq j$) f_i ist; die Anzahl der j-Ecke ist $f_j - 1$. Dabei sind alle Ecken 3wertig.

Gerd Blind, Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

[1] V. EBERHARD, *Zur Morphologie der Polyeder* (Leipzig 1891).

[2] B. GRÜNBAUM, *Some Analogues of Eberhard's Theorem on Convex Polytopes,* Israel J. Math. *6,* 398-411 (1968).

[3] S. JENDROĽ and E. JUCOVIČ, *On a Conjecture by B. Grünbaum,* Discrete Mathematics *2,* 35-49 (1972).

Über gewisse n-komponierbare Graphen

Im folgenden sei mit Γ stets ein endlicher, schlichter und zusammenhängender Graph[1]) bezeichnet, welcher mindestens eine Kante enthält.

Es werde der Begriff des Kompositionsgrades[2]) eines Graphen eingeführt, welcher sich auf die «Zusammensetzung» eines Graphen aus besonders «einfachen» Graphen bezieht.

Unter dem *Kompositionsgrad* $c(\Gamma)$ eines Graphen Γ sei die kleinste unter den natürlichen Zahlen z verstanden, für welche Γ eine Darstellung

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{z} B_i$$

als Vereinigung von geeigneten Bäumen $B_i \subseteq \Gamma$ besitzt. Ein *n-komponierbarer Graph* sei ein Graph Γ mit $c(\Gamma) = n$.

Für jeden Graphen Γ besteht nun die Abschätzung

$$a_1(\Gamma) \leqq c(\Gamma)(a_0(\Gamma) - 1), \tag{1}$$

wobei mit $a_0(\Gamma)$ bzw. $a_1(\Gamma)$ die Anzahl der Knotenpunkte bzw. Kanten von Γ

[1]) Die Definitionen aller in der vorliegenden Note verwendeten und nicht näher definierten graphentheoretischen Begriffe findet man bei K. WAGNER [1].

[2]) Man vergleiche dazu auch [3] und [4].

bezeichnet sei. Der Beweis von (1) folgt unmittelbar aus dem bekannten Sachverhalt, dass für jeden Baum B die Beziehung $a_1(B)=a_0(B)-1$ gilt.

Es stellt sich die Frage nach den Graphen Γ, für welche in (1) das Gleichheitszeichen besteht.

Unter einem *primitiven n-komponierbaren Graphen* sei ein n-komponierbarer Graph Γ mit $a_1(\Gamma)=n(a_0(\Gamma)-1)$ verstanden. Ein primitiver n-komponierbarer Graph Γ ist danach ein Graph, welcher eine Darstellung als Vereinigung von n paarweise kantendisjunkten Gerüsten besitzt.

Die Frage nach den primitiven n-komponierbaren Graphen[3]) wird besonders interessant, wenn man sie auf die regulären Graphen einschränkt:

Welches sind die regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ?

Diese Frage soll nachstehend untersucht werden. Man benötigt dazu den

Hilfssatz. *Der vollständige Graph V_{2n} mit $2n$ Knotenpunkten ist ein primitiver n-komponierbarer Graph.*

Der *Beweis* des Hilfssatzes soll durch vollständige Induktion nach n erbracht werden. Für $n=1$ trifft der Hilfssatz offensichtlich zu. Weiter sei bereits bewiesen, dass der vollständige Graph $V_{2m}(m\geqq 1)$ ein primitiver m-komponierbarer Graph ist. Daraus folgt, dass man die Kanten von V_{2m} derart mit m Farben $\bar{1}, \ldots, \bar{m}$ färben kann, dass die Menge der gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m} bildet.

Es sei jetzt V_{2m} ein vollständiger Graph, dessen Kanten mit m Farben $\bar{1}, \ldots, \bar{m}$ so gefärbt sind, dass die gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m} bilden. Man zerlege die Menge der Knotenpunkte von V_{2m} irgendwie in zwei Klassen von Knotenpunkten $a_1, \ldots, a_m$ und $b_1, \ldots, b_m$. Fügt man zu den vollständigen Graphen V_{2m} eine neue Kante (c_1, c_2) mit $c_1, c_2 \notin V_{2m}$ hinzu und verbindet sowohl c_1 als auch c_2 mit allen Knotenpunkten von V_{2m} jeweils durch eine Kante, so erhält man den vollständigen Graphen V_{2m+2}.

Die noch nicht gefärbten Kanten von V_{2m+2} werden jetzt wie folgt gefärbt:

1. Man färbe die Kante (c_1, c_2) mit der Farbe $\overline{m+1}$.
2. Man färbe die Kantenpaare (c_1, b_i), (c_2, a_i) $(i=1, \ldots, m)$ sämtlich mit der Farbe $\overline{m+1}$.
3. Man färbe die Kantenpaare (c_1, a_i), (c_2, b_i) $(i=1, \ldots, m)$ jeweils mit der Farbe $\bar{i}$.

Damit sind die Kanten von V_{2m+2} mit $m+1$ Farben derart gefärbt, dass die gleichgefärbten Kanten jeweils ein Gerüst von V_{2m+2} bilden.

Für den Kompositionsgrad von V_{2m+2} folgt daraus $c(V_{2m+2})\leqq m+1$. Angenommen, es gilt $c(V_{2m+2})\leqq m$. Dann erhält man aber wegen $a_0(V_{2m+2})=2m+2$ und $a_1(V_{2m+2})=(m+1)(2m+1)$ aus (1) den Widerspruch $(m+1)(2m+1) \leqq m(2m+1)$. Man hat also $c(V_{2m+2})=m+1$.

Aus $c(V_{2m+2})=m+1$ und der eben nachgewiesenen Färbungsmöglichkeit der Kanten von V_{2m+2} folgt, dass V_{2m+2} ein primitiver $(m+1)$-komponierbarer Graph ist. Damit ist der Hilfssatz durch vollständige Induktion bewiesen.

Unter Heranziehung des Hilfssatzes soll jetzt gezeigt werden:

---

[3]) Zu diesem Thema «Graphen mit vorgegebenen Gerüste-Eigenschaften» vergleiche man auch [2].

Satz über reguläre primitive *n*-komponierbare Graphen. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es nur genau einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ, nämlich den vollständigen Graphen V_{2n} mit $2n$ Knotenpunkten.*

Beweis. Für $n=1$ trifft die Aussage sicher zu. Ein 1-komponierbarer Graph Γ ist nämlich notwendig isomorph mit einem Baum B. Und da jeder Baum B mindestens zwei Knotenpunkte a vom Grade $\gamma(a, B)=1$ enthält, gibt es unter allen Bäumen nur genau einen regulären Graphen, nämlich den aus einer Kante bestehenden Graphen $k=V_2$.

Es sei jetzt Γ ein primitiver n-komponierbarer Graph regulär vom Grade r und $n>1$. Für Γ gilt dann $2\alpha_1(\Gamma)=r\alpha_0(\Gamma)$ und $\alpha_1(\Gamma)=n(\alpha_0(\Gamma)-1)$, woraus man die Beziehung

$$2n=\alpha_0(\Gamma)(2n-r) \tag{2}$$

gewinnt.

Aus (2) folgt $\alpha_0(\Gamma)\leqq 2n$. Angenommen, es gilt $\alpha_0(\Gamma)\leqq 2n-2$. Dann ist $c(\Gamma)\leqq c(V_{2n-2})$. Aus dem Hilfssatz folgt aber $c(V_{2n-2})\leqq n-1$, so dass sich der Widerspruch $c(\Gamma)\leqq n-1$ ergibt.

Man hat also $\alpha_0(\Gamma)=2n-1$ oder $2n$. Aus $\alpha_0(\Gamma)=2n-1$ und (2) folgt, dass $2n-1$ ein Teiler von $2n$ ist. Wegen $n>1$ ist das aber ein Widerspruch. Man erhält damit schliesslich $\alpha_0(\Gamma)=2n$, woraus sich auf Grund von (2) für r die Beziehung $r=2n-1$ ergibt. Ein Graph Γ mit $2n$ Knotenpunkten regulär vom Grade $r=2n-1$ ist aber notwendig isomorph mit dem vollständigen Graphen V_{2n}.

Damit ist jetzt bewiesen: Falls es einen regulären primitiven n-komponierbaren Graphen Γ gibt, so muss Γ mit dem vollständigen Graphen V_{2n} isomorph sein. Aus dem Hilfssatz folgt aber, dass der vollständige Graph V_{2n} in der Tat ein regulärer primitiver n-komponierbarer Graph ist.

Es hat sich damit gezeigt:

Die vollständigen Graphen mit gerader Knotenpunktanzahl sind die einzigen unter den regulären Graphen Γ, welche eine Darstellung als Vereinigung von paarweise kantendisjunkten Gerüsten zulassen.

Horst Bergmann, Hamburg

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. Wagner, *Graphentheorie* (Mannheim 1970).

[2] L. Friess, *Graphen, worin je zwei Gerüste isomorph sind,* Math. Ann. *204,* 65–71 (1973).

[3] H. Bergmann, *Über die Darstellung planarer Graphen als Vereinigung von Bäumen,* Arch. Math. *26,* 332–336 (1975).

[4] H. Bergmann, *Ein Beitrag zur Theorie der endlichen n-komponierbaren Graphen,* Math. Nachr. *66,* 25–34 (1975).

Kleine Mitteilungen

Ein Gleichverteilungskriterium

Wir betrachten eine Folge von ganzen rationalen Zahlen $(\kappa_n), n=1,2, \ldots$ und eine natürliche Zahl $m\geq 2$. Die Folge (κ_n) heisst gleichverteilt mod m wenn für $h=0,1,\ldots, m-1$ die Limesbeziehung