Elementare Betrachtungen über arithmetische Folgen

Autor(en): **Kanold, Hans-Joachim**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **31 (1976)**

Heft 4

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-31399

[4] W. FENCHEL, *On Th. Bang's Solution of the Plank Problem*, Matematisk Tidsskrift *B*, 49-51 (1951).
[5] A.W. ROBERTS und D.E. VARBERG, *Convex Functions*, Academic Press, New York, 1973.
[6] R.T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
[7] D.R. SMART, *Fixed Point Theorems*, Cambridge University Press, 1974.
[8] A. TARSKI, *Uwagi o stopniu równowaznósci wielokatów*, Parameter *2*, 1932.
[9] F.A. VALENTINE, *Konvexe Mengen*, Bibl. Inst. Mannheim, Nr.402/402a, 1968.

Elementare Betrachtungen über arithmetische Folgen

Herrn Professor Dr. E. Trost zum 65. Geburtstage

Im folgenden bezeichnen kleine lateinische Buchstaben natürliche Zahlen. Wir betrachten Mengen der Gestalt

$$\mathbf{A}=\{a,a+d,a+2d,\ldots\}. \tag{1}$$

Den g. g. T. der Zahlen a, d, n bezeichnen wir durch

$$(a,d,n)=h. \tag{2}$$

Aus $h>1$ folgt, dass alle Elemente von $\mathbf{A}$ durch h teilbar sind und damit auch, dass kein Element von $\mathbf{A}$ zu n teilerfremd ist. Wir setzen von nun an voraus:

$$h=1, n>1. \tag{3}$$

Wir führen jetzt die Funktion $g(n)$ von E. Jacobsthal ein als Maximalabstand zweier aufeinanderfolgender zu n teilerfremder natürlicher Zahlen [1]. Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz. *Jede Sequenz von* $\mathbf{A}$ *der Länge* $g\left(\frac{n}{(d,n)}\right)$ *enthält mindestens eine zu n teilerfremde Zahl; es gibt Sequenzen von* $\mathbf{A}$ *der Länge* $g\left(\frac{n}{(d,n)}\right)-1$, *welche keine zu n teilerfremde Zahl enthalten.*

Beweis. Wir führen zunächst einige Bezeichnungen ein.

$$\begin{array}{lll} (a,d)=h_1; & a=h_1a'; & d=h_1d'; \\ (a,n)=h_2; & a=h_2a''; & n=h_2n'; \\ (d,n)=h_3; & d=h_3d''; & n=h_3n''; \end{array} \tag{4}$$

Wegen (3) sind h_1, h_2, h_3 paarweise teilerfremd, ausserdem gilt

$$(n,h_1)=1. \tag{5}$$

Jedes Element von **A** hat die Gestalt $a+vd\,(v=0,1,2,\ldots)$ und ist durch h_1 teilbar. Wegen (5) dürfen wir statt **A** die Menge

$$\mathbf{A}_{h_1}=\left\{\frac{a}{h_1},\frac{a}{h_1}+\frac{d}{h_1},\frac{a}{h_1}+2\frac{d}{h_1},\ldots\right\}=\left\{a',a'+d',a'+2d',\ldots\right\} \tag{6}$$

untersuchen. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass n quadratfrei ist; nach (4) ist $\frac{n}{h_3}=n$; $\frac{d}{h_1}=d'$ und

$$(n'',d')=1. \tag{7}$$

Die Zahlen $0\cdot n''$, $1\cdot n''$, …, $(d'-1)\,n''$ durchlaufen ein vollständiges Restsystem (mod d'). Wir können daher v so wählen, dass

$$a'+vn''\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ d');$$

$$a'+vd'\equiv\frac{a'+vn''}{d'}d'+vd'\equiv\left(\frac{a'+vn''}{d'}+v\right)d'\,(\mathrm{mod}\,n'') \tag{8}$$

wird. Die Elemente von $\mathbf{A}_{h_1}$ (bzw. von **A**) verhalten sich in bezug auf den g. g. T. mit n'' so wie die Elemente von

$$\left\{\frac{a'+vn''}{d'}+v\right\}_{v=0,1,2,\ldots}.$$

Wir beachten noch

$$(h_3,a+vd)=(h_3,a)=1 \tag{9}$$

und erhalten die Aussage: Jede Sequenz von **A** der Länge $g\,(n'')$ enthält mindestens eine zu n teilerfremde Zahl. Nach der Definition von $g\,(n'')$ existiert nun andererseits eine Sequenz

$$A+1,A+2,\ldots,A+g\,(n'')-1, \tag{10}$$

so dass keine dieser Zahlen zu n'' (also auch zu n) teilerfremd ist. Wir können nach (7) w so wählen, dass

$$wn''+(A+1)\,d'\equiv a'\,(\mathrm{mod}\,d') \tag{11}$$

erfüllt ist. Damit wird aber

$$wn''+(A+1)\,d'=a'+vd'$$
$$wn''(A+2)\,d'=a'+(v+1)\,d'$$

$$wn''+\big(A+g\,(n'')-1\big)\,d'=a+\big(v+g\,(n'')-2\big)\,d' \tag{12}$$

eine Sequenz von $\mathbf{A}_{h_1}$ der Länge $g(n'')-1$, bei welcher keine Zahl zu n'' teilerfremd ist. Mit Berücksichtigung von (9) ist der Satz bewiesen. Als einfache Folgerung ergibt sich:

Sei $(a,d)=1$; $n=\prod_{\substack{p\leq N\\ p\nmid d}} p$. *Dann enthält die Sequenz* $a, a+d, \ldots, a+(g(n)-1)\,d$ *mindestens eine Zahl, welche nur Primteiler* $>N$ *besitzt. Diese Zahl der Gestalt* $a+vd$ *ist selbst Primzahl, wenn* $a<d$; $g(n)\,d\leqq(N+1)^2$ *erfüllt ist.*

Hans-Joachim Kanold, Braunschweig

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Jacobsthal, *Über Sequenzen ganzer Zahlen, von denen keine zu n teilerfremd ist, I–III*, Norske Vid. Selsk. Forhdl. *33*, 117–124, 125–131, 132–139 (1960).

Kleine Mitteilungen

Bemerkungen zum Kontraktionsprinzip

1. Einleitung. Es ist der Zweck dieser Note, einen neuen Zugang zum Kontraktionsprinzip und zu anderen Sätzen über kontrahierende Abbildungen aufzuzeigen. Bei diesem Zugang ist eine «Grundformel» grundlegend, aus welcher alle anderen Aussagen leicht hergeleitet werden können.

2. Grundformel. (X,ρ) ist immer ein vollständiger metrischer Raum, T ist eine Abbildung von X in sich selbst. Die Abbildung T ist eine Kontraktion (oder kontrahierend), wenn

$$\rho(Tx,Ty)\leq a\rho(x,y) \text{ für } x,y\in X \tag{1}$$

gilt, wobei $0\leq a<1$ ist. Durch Induktion folgt für $n=1,2,\ldots$

$$\rho(T^n x, T^n y)\leq a^n\rho(x,y) \text{ für } x,y\in X. \tag{2}$$

Es sei $x,y\in X$. Aus der Dreiecksungleichung und aus (1) erhalten wir

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&\leq\rho(x,Tx)+\rho(Tx,Ty)+\rho(Ty,y)\\&\leq\rho(x,Tx)+a\rho(x,y)+\rho(y,Ty).\end{aligned}$$

Wenn der zweite Term auf der rechten Seite auf die linke Seite gebracht und die entstehende Ungleichung durch $1-a$ dividiert wird, ergibt sich unsere Grundformel

$$\rho(x,y)\leq\frac{1}{1-a}\{\rho(x,Tx)+\rho(y,Ty)\} \text{ für } x,y\in X. \tag{GF}$$