

Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **30 (1975)**

Heft 3

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

We finally remark that the above theorem need not hold if $\alpha(1) = 0$ as is shown by the following example.

Example. Let $\alpha, \beta \in S$ be defined as follows:

$$\alpha(n) = \begin{cases} 0 & \text{if } n = 1 \\ \mu(n) & \text{if } n > 1 \text{ } (\mu \text{ Möbiusfunction}) \end{cases} \quad \beta(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{for } n > 1 \end{cases}$$

then clearly $\alpha \circ \beta = 0$ so that α is a zero-divisor. But for any finite number of primes $p_1, \dots, p_r$,

$$\alpha(p_1 \cdots p_r) = \mu(p_1 \cdots p_r) = (-1)^r \neq 0.$$

A. S. Sastry, Waltair, India

REFERENCE

- [1] M. V. SUBBARAO, *On some arithmetic convolutions, Lecture notes in Mathematics*, Vol. 251, Springer-Verlag, p. 247–271 (1972).

Aufgaben

Aufgabe 717. Gegeben sei ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r . Man beweise: Die Schar aller jener Kreise, deren Mittelpunkte P auf einer Sehne s von k liegen und deren Radien durch die Potenzstrecke von P bezüglich k

$$(\sqrt{r^2 - MP^2} \geq 0)$$

gegeben sind, wird von einer Ellipse eingehüllt. W. Kienberger, Graz, Österreich

Lösung: Wir wählen ein cartesisches Koordinatensystem (X, Y) mit M als Ursprung so, dass die Sehne s parallel zur X -Achse ist; ihr Abstand von der X -Achse sei a . Es sei $P = (x, a) \in s$. Dann gilt $\overline{MP}^2 = a^2 + x^2$. Die Gleichung der Kreislinie um P mit Radius $\sqrt{r^2 - \overline{MP}^2}$ ist dann

$$f(X, Y; x) = (X - x)^2 + (Y - a)^2 - (r^2 - a^2 - x^2) = 0. \quad (1)$$

Die Gleichung der Umhüllenden von (1) erhält man durch Auflösung des Gleichungssystems

$$f(X, Y; x) = 0 \quad (2)$$

$$f_x(X, Y; x) = 2(x - X) + 2x = 0, \quad (3)$$

wobei x als Parameter der betrachteten Schar auftritt.

Aus (3) und (2) mit (1) folgt dann:

$$2 \left(\frac{X}{2} \right)^2 + (Y - a)^2 = r^2 - a^2. \quad (4)$$

Die Umhüllende ist folglich eine Ellipse.

Aus (4) folgt noch

$$0 \leq r^2 - a^2 - \frac{X^2}{2} = r^2 - a^2 - 2x^2,$$

d.h., nur die dem Bereich $|x| \leq \sqrt{(r^2 - a^2)}/2$ der Sehne s zugeordneten Kreise (1) werden von der Ellipse (4) eingehüllt. Die Kreise mit Parameterwerten $\sqrt{(r^2 - a^2)}/2 < |x| \leq \sqrt{r^2 - a^2}$ liegen jeweils ganz innerhalb der Grenzkreise mit $|x| = \sqrt{(r^2 - a^2)}/2$.

Anmerkung: Die Aufgabenthese lässt sich in dieser Form wörtlich auf den n -dimensionalen Raum übertragen, indem man die Kreise durch n -dimensionale Kugeln ersetzt. Die Umhüllende ist dann ein n -dimensionales Ellipsoid. Der Beweis verläuft völlig analog.

L. Hämmerling, Aachen, BRD

Weitere Lösungen sandten G. Bach (Braunschweig, BRD), J. Bauer (Wien, Österreich), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), K. Grün (Linz, Österreich), H. Kappus (Rodorsdorf, SO), I. Paasche (München, BRD; zwei Lösungen), J. Schopp (Budapest, Ungarn), Hj. Stocker (Wädenswil, ZH), M. Vowe (Therwil, BL).

Aufgabe 718. Gegeben ist ein ebenes Dreieck ABC mit Umfang $a + b + c = 2s$, Inkreisradius r und Umkreisradius R . Man zeige: Sind X, Y, Z die drei Inkreisberührungspunkte oder die drei inneren Ankreisberührungspunkte auf den Seiten der Längen a, b, c von ABC , so gilt beide Male

$$S \equiv AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{u s^2 - v r (4R + r)}{R},$$

worin u und v von der Gestalt $tR \pm r$ mit $t \in \{1, 2, 3, 4\}$ sind.

I. Paasche, München, BRD

Lösung: 1) X, Y, Z seien die drei Inkreisberührungspunkte. Man berechnet AX^2 nach dem Cosinussatz auf zwei Arten und bildet das arithmetische Mittel:

$$\begin{aligned} AX^2 &= \frac{1}{2} [b^2 + (s - c)^2 - 2b(s - c) \cos \gamma + c^2 + (s - b)^2 - 2c(s - b) \cos \beta] \\ &= b^2 + c^2 + s^2 - s(b + c) - s(b \cos \gamma + c \cos \beta) + bc(\cos \gamma + \cos \beta). \end{aligned}$$

Da $(1/2)(b^2 + c^2) = (1/2)a^2 + bc \cos \alpha$, $b + c = 2s - a$ und $b \cos \gamma + c \cos \beta = a$, findet man weiter

$$AX^2 = \frac{1}{2} (a^2 + b^2 + c^2) - s^2 + bc(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Hierzu addiert man die zwei analogen Formeln für BY^2 und CZ^2 und bekommt

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{3}{2} (a^2 + b^2 + c^2) - 3s^2 + (bc + ca + ab)(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Hier führen wir folgendes ein: $a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - r(4R + r))$, $bc + ca + ab = r(4R + r) + s^2$, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = (R + r)/R$, reduzieren und erhalten

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{(R + r)s^2 - (2R - r)r(4R + r)}{R}.$$

2) X, Y, Z seien nun die drei inneren Ankreisberührungspunkte. Ähnlich wie im ersten Teil erhält man

$$AX^2 = b^2 + c^2 - s^2 + b^2 \cos \gamma + c^2 \cos \beta.$$

Hier führen wir $b \cos \gamma = a - c \cos \beta$, $c \cos \beta = a - b \cos \gamma$ ein und finden

$$AX^2 = b^2 + c^2 - s^2 + a(b + c) - bc(\cos \beta + \cos \gamma)$$

und nach Addition von $0 = (1/2)(b^2 + c^2) - (1/2)a^2 - bc \cos \alpha$ weiter

$$AX^2 = \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 - s^2 + ab + ac - bc(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Hierzu addieren wir analoge Formeln und bekommen:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{5}{2}(a^2 + b^2 + c^2) - 3s^2 + (bc + ca + ab)(2 - (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)).$$

Wir setzen die oben angegebenen Ausdrücke ein, reduzieren und finden schliesslich:

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = \frac{(3R - r)s^2 - r(4R + r)^2}{R}.$$

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösung sandten B. Bundschuh (Köln, BRD), H. Frischknecht (Berneck, SG) und M. Vowe (Therwil, BL).

Aufgabe 719. Es sei p_r die r -te Primzahl ($p_1 = 2, p_2 = 3$). Dann gibt es für $r > 2$ mindestens eine Primzahl q mit

$$p_r < q < \prod_{k=1}^r p_k - 1.$$

E. Härtter, Mainz, BRD

Lösung: Die beiden Zahlen $a := \prod_{k=1}^r p_k - 4$ und $b := \prod_{k=1}^r p_k - 2$ können nicht beide reine Zweierpotenzen sein. Denn wäre etwa $a = 2^m$ und $b = 2^n$, so wäre $2 = b - a = 2^n - 2^m$, also $m = 1, n = 2$; d.h. $a = 2 \cdot 3 - 4, b = 2 \cdot 3 - 2$, also $r = 2$, im Widerspruch zur Voraussetzung $r > 2$. Mindestens eine der beiden Zahlen a, b ist also durch eine Primzahl $q \neq 2$ teilbar. Evident ist q auch von $p_2, \dots, p_r$ verschieden. Daher ist

$$p_r < q \leq b < \prod_{k=1}^r p_k - 1, \text{ wzbw.}$$

E. P. Bauhoff, Mannheim, BRD

Weitere Lösungen sandten R. Acampora (Zürich), A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), O. Buggisch (Darmstadt, BRD), P. Bundschuh (Köln, BRD), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodorsdorf, SO), H. Knoll (Disentis, GR), O. P. Lossers (Eindhoven, Niederlande), A. Marshall (Madison, Wisconsin, USA), S. Rümp (Kaiserslautern, BRD), J. Schopp (Budapest, Ungarn), E. Teuffel (Korntal, BRD), M. Vowe (Therwil, BL), H. Warncke (Pôrto Alegre, Brasilien) und ein anonym er Einsender.

Anmerkungen: Verschiedene Einsender leiten die Behauptung aus dem Satz von Tschebyscheff ($\pi(2n) - \pi(n) \geq 1$ für $n \geq 1$) her. E. Teuffel zeigt, dass «mindestens eine» ersetzt werden kann durch «mindestens $\lceil 2 \log(2p_r) \rceil$ ». A. Marshall weist darauf hin, dass für $r \geq 2$ gilt: p_{r+1} ist das zweitkleinste Element der Menge aller natürlichen Zahlen m mit $m < p_1 \cdot \dots \cdot p_r$, $(m, p_1 \cdot \dots \cdot p_r) = 1$ (vgl. Amer. Math. Monthly 79 (1972) 1103, Zeilen 6 bis 10).

Man kann in der Aufgabe $p_1 p_2 \dots p_r - 1$ durch $(p_1 p_2 \dots p_r)^{2/r}$ ersetzen, da dieser Ausdruck grösser als p_{r+1} ist (vgl. E. Trost, Primzahlen, 2. Aufl. S. 63). Die so entstehende Aussage ist bestmöglich, da für $r = 3$ nur 7 die Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 720. Es sei $f(n)$ die kleinste Zahl, für welche für alle $x \geq 1$ gilt:

$$\pi(x) \leq \frac{1}{n} (x + f(n)). \quad (*)$$

Man zeige, dass für alle natürlichen Zahlen k gilt:

$$f(n) = \frac{e^n}{n-1} + o\left(\frac{e^n}{n^k}\right).$$

P. Erdős, Budapest, und J. L. Selfridge, DeKalb, Illinois, USA

Lösung des Aufgabenstellers: Bekanntlich ist

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\ln y} + o\left(\frac{x}{(\ln x)^l}\right).$$

Hieraus folgt

$$\pi(x) = \frac{x}{\ln x - 1} + o\left(\frac{x}{(\ln x)^l}\right) \quad (1)$$

für jedes l . Aus (1) ergibt sich, dass (*) für

$$f(n) \leq \frac{e^n}{n-1} + \frac{e^n}{n^k}$$

nicht für alle $x > 1$ gelten kann. So gilt (*) nicht für

$$x = e^n, \quad 1 > k + 1, \quad \text{und} \quad n > n_0(k).$$

Wir zeigen nun, dass (*) für

$$f(n) \geq \frac{e^n}{n-1} + \frac{e^n}{n^k}$$

für jedes $x > 1$ gilt, wenn $n > n_o(k)$. Es sei zuerst

$$x < \frac{e^n}{n^2}.$$

(*) gilt wegen $\pi(x) < x$. Für

$$x \geq \frac{e^n}{n^2}$$

folgt aus (1)

$$\pi(x) < \frac{x}{\ln x - 1} + \frac{x}{(\ln x)^{k+3}}.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass für

$$x \geq \frac{e^n}{n^2} \quad \text{gilt} \quad \frac{x}{\ln x - 1} + \frac{x}{(\ln x)^{k+3}} < \frac{1}{n} \left(x + \frac{e^n}{n-1} + \frac{e^n}{n^k} \right).$$

Setzt man $x = e^{n-t}$, $t = 2 \ln n$, so erhält die Ungleichung die Form

$$\frac{e^n - t}{n - t - 1} + \frac{e^{n-t}}{(n-t)^{k+3}} < \frac{1}{n} \left(e^{n-t} + \frac{e^n}{n-1} + \frac{e^n}{n^k} \right)$$

oder

$$\frac{n}{n-t-1} + \frac{n}{(n-t)^{k+3}} < 1 + \frac{n^2}{n-1} + \frac{n^2}{n^k}.$$

Wegen $t = o(n)$ strebt die linke Seite für $n \rightarrow \infty$ gegen 1. Daher ist

$$f(n) = \frac{e^n}{n-1} + o\left(\frac{e^n}{n^k}\right) \text{ für alle } k.$$

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Dezember 1975**. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem . . . A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 741. In einem Dreieck ABC seien A', B', C' und A_1, B_1, C_1 die Mittelpunkte bzw. die Höhenfusspunkte der Seiten BC, CA, AB . In der Dreiecksebene seien noch ein Punkt P und die zu P symmetrischen Punkte P_a, P_b, P_c in bezug auf $B'C', C'A', A'B'$ gegeben. Man zeige, dass die Kreise mit den Durchmesserstrecken A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c und der Feuerbachsche Neunpunktekreis des Dreiecks ABC sich in einem Punkt schneiden.

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 742. Ein Ring R mit Einselement 1 heisst lokal, falls er ein Ideal I besitzt derart, dass $R \setminus I$ die Einheitengruppe von R ist. Bekanntlich ist dann der Quotientenring R/I ein Körper. Man beweise: Ist R ein lokaler Ring und hat R/I eine von 2 verschiedene Charakteristik, so gibt es genau ein Element a von R mit $a \neq 1$ und $a^2 = 1$.

H. Lüneburg, Kaiserslautern, Bundesrepublik Deutschland

Aufgabe 743. Am ebenen Dreieck mit Inkreisradius r , Umkreisradius R und Umfang $2s$ gibt es beliebig viele richtige Aussagen der Form

$$0 \leq \frac{Rr - 2r^2}{1} \leq \frac{s^2 - 27r^2}{A} \leq \frac{2s^2 - 27Rr}{B} \leq \frac{R^2 - 2Rr}{C} \\ \leq \frac{R^2 - 4r^2}{D} \leq \frac{27R^2 - 4s^2}{E}$$

mit positiven reellen Zahlen A bis E . Man berechne der Reihe nach die maximalen derartigen A, B, C, D, E .

I. Paasche, München, BRD

Aufgabe 744. Es sei $2 = p_1 < p_2 < \dots$ die Folge aller Primzahlen, und für jedes natürliche n bezeichne q_n die kleinste Primzahl, welche kongruent 1 modulo p_n ist. Man zeige, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty \text{ gilt.}$$

P. Erdős, Budapest, Ungarn

Bericht

Mathematische Problemwettbewerbe 1972/73 und 1973/74 im Kanton Bern

Das mathematische Institut der Universität Bern hat es übernommen, die von der kantonal-bernischen «Informationsstelle für Mathematikunterricht» eingeführte Tradition der Mathematikwettbewerbe für höhere Mittelschüler fortzusetzen. Die Berichte über die 6 früheren Wettbewerbe (1966–1972) finden sich in *El. Math.* 23, 18–20 (1968); 25, 39–43 (1970); 26, 93–95 (1971); 28, 49–53 (1973).

Wettbewerb 7 (1972/73) war als Konkurrenz für Zweiermannschaften ausgeschrieben. Zuerst waren 4 Serien zu Hause zu bearbeiten; die 8 bestklassierten Mannschaften bestritten zum Schluss den Final in Klausur.

Wettbewerb 8 (1973/74) wurde erstmals in 2 Kategorien aufgeteilt. In der schweren Kategorie kämpften wiederum Zweiermannschaften; nach 3 zu Hause gelösten Serien qualifizierten sich 8 Mannschaften für den Viertelfinal in Klausur; nach dem Ausscheidungssystem verblieben für den Halbfinal 4 Mannschaften, wovon die beiden besten gleichentags den Final zu bestreiten hatten. In der leichten Kategorie waren nur Schüler der Seminarien, der Untergymnasien und der Quarten