Über ein System partieller Differentialgleichungen und einen zugehörigen Bergman-Operator

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires - Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

El. Math. | Band 29 | Heft 5 | Seiten 105–128 | 10. September 1974

Über ein System partieller Differentialgleichungen und einen zugehörigen Bergman-Operator

1. Einleitung

Die vorliegende Arbeit betrifft das System

$$\operatorname{grad} u = A \operatorname{grad} v\,, \tag{1.1}$$

bestehend aus zwei linearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$u_x = a_{11} v_x + a_{12} v_y$$
$$u_y = a_{21} v_x + a_{22} v_y$$

wobei die Elemente der Matrix $A = (a_{jk})$ Funktionen von x und y sind, über die später noch nähere Voraussetzungen gemacht werden. Systeme der Form (1.1) treten häufig auf und verschiedenartig motiviert. Man denke etwa an die Funktionentheorie, die pseudoanalytischen Funktionen von L. Bers [3] und I. N. Vekua [13], die quasikonforme Abbildung (vgl. H. P. Künzi [9]), gewisse Existenzfragen für elliptische Gleichungen (vgl. z.B. C. B. Morrey [12]) und Strömungsprobleme (s. Abschnitt 7).

Unseren Ausgangspunkt bilden einfache differentialgeometrische Fragen: In Abschnitt 2 erörtern wir flächentreue Abbildungen im Zusammenhang mit (1.1) und in Abschnitt 3 eine komplexe Schreibweise des Systems. Als zugehörige Integrabilitätsbedingungen ergeben sich in Abschnitt 4 zwei lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung, die im Zusammenhang mit Bergman-Operatoren von besonderem Interesse sind. Was wir aus der Theorie dieser Operatoren brauchen, stellen wir in Abschnitt 5 zusammen. In Abschnitt 6 gewinnen wir dann für die genannten Gleichungen einen Bergman-Operator in expliziter Darstellung. Die Arbeit schliesst mit einer kurzen Betrachtung zur Bedeutung der Systeme (1.1) in der Hydrodynamik.

2. Flächentreue Abbildungen

Das System (1.1) ist eine Verallgemeinerung der Cauchy-Riemann-Gleichungen. Dies regt zu folgender Überlegung an: Es sei $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ holomorph in einem Gebiet G der z-Ebene, $z = x + iy$. Wir ordnen f zwei Flächen im E_3 zu, die *Realteilfläche*

$$R(f)\colon\ r(x, y) = (x, y, u(x, y)) \qquad (x + iy \in G)$$

und die *Imaginärteilfläche*

$$I(f)\colon\ \tilde{r}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, \tilde{y}, v(\tilde{x}, \tilde{y})) \qquad (\tilde{x} + i\tilde{y} \in G)\,.$$

Beide Flächen haben dieselbe Gauss-Krümmung (vgl. [7])

$$K = -\,|f''|^2/(1 + |f'|^2)^2\,.$$

Trotzdem ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T:\ & R(f) \to I(f) \\ & (x, y) \mapsto (\tilde{x}, \tilde{y}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

weder isometrisch noch konform, es sei denn, f ist konstant. T ist auch nicht geodätisch, es sei denn, f ist linear; vgl. [8]. T ist aber flächentreu. Wir fragen nun, wie allgemein (1.1) sein darf, ohne dass diese Flächentreue verlorengeht.

Satz 1. *Es sei $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, und u, v seien Lösungen von* (1.1) *in einem Gebiet G. Dann gilt: Die durch* (2.1) *gegebene Abbildung T ist genau dann flächentreu, wenn die Matrix A in* (1.1) *orthogonal ist.*

Beweis. Notwendig und hinreichend für die Flächentreue der Abbildung T ist die Gleichheit $g = \tilde{g}$ der Diskriminanten der 1. Grundform von $R(f)$ und $I(f)$. Nun gilt

$$g = 1 + u_x^2 + u_y^2$$

und entsprechend für $I(f)$. Es folgt

$$g = \tilde{g} \leftrightarrow |\operatorname{grad} u| = |\operatorname{grad} v|\,.$$

Dies ergibt Bedingungen für die Matrix A. Ausgedrückt durch Spaltenvektoren a_1, a_2 lauten diese:

$$|a_1| = 1\,, \qquad |a_2| = 1\,, \qquad a_1^{\mathrm{T}} a_2 = 0\,.$$

A muss also orthogonal sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir können nun zwei Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} &\text{(I)}\quad D = \det A = 1 \\ &\text{(II)}\quad D = \det A = -1\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Zugehörige orthogonale Matrizen bezeichnen wir mit A_I bzw. A_{II}. Deren Elemente lassen sich durch eine Winkelvariable $\alpha(x, y)$ ausdrücken. Wir schreiben

$$A_I(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad A_{II}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Den Cauchy-Riemann-Gleichungen entspricht dann $A_I(-\pi/2)$. Folglich gilt für eine Lösung $(u, v) \in C^1(G)$ von (1.1): Die Funktion $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ ist dann und nur dann holomorph in G, wenn die Abbildung T flächentreu ist und die Kurven $u = konst$ und $v = konst$ ein orthogonales Netz derart bilden, dass der gerichtete Winkel von $v = konst$ nach $u = konst$ die Grösse $\pi/2$ hat. Fordern wir also gleichzeitig Flächentreue von T und Orthogonalität der Kurven $u = konst$, $v = konst$, so führt dies im wesentlichen auf die Cauchy-Riemann-Gleichungen. Wir lassen nun die erste dieser beiden Bedingungen fallen. Aus $u = konst$, $du = 0$, $y' = -u_x/u_y$, den entsprechenden Formeln für die Kurven $v = konst$ und der bekannten Orthogonalitätsbedingung erhalten wir dann den

Satz 2. *Ein Kurvennetz $u = konst$, $v = konst$ mit $u, v \in C^1(E_2)$ ist orthogonal genau dann, wenn (u, v) eine Lösung von* (1.1) *in E_2 mit einer schiefsymmetrischen Matrix A ist, also von der Form*

$$\begin{aligned} u_x &= a(x, y)\, v_y\,, \\ u_y &= -a(x, y)\, v_x\,. \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Komplexe Form

Das System (1.1) lässt sich genau dann in der Form

$$u_x + i\,u_y = (A_1 + i\,A_2)\;(v_x + i\,v_y) \tag{3.1}$$

mit reellem A_1 und A_2 darstellen, wenn A die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

hat, wie man leicht sieht. Derartige Systeme spielen eine Rolle bei pseudoanalytischen Funktionen von L. Bers [3] und G. N. Poloshi (vgl. G. Kneis [5]). Interessanterweise hat A_I die Gestalt (3.2), A_{II} aber nicht. Auch (3.2) lässt sich eine orthogonale Matrix B zuordnen, nämlich

$$B = b^{-1}A \quad \mathit{mit} \quad b = (a_{11}^2 + a_{12}^2)^{1/2}.$$

Weiterhin können wir (3.1) vermöge

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

in der Form

$$u_{\bar{z}} = H\,v_{\bar{z}}\,, \qquad H = a_{11} - i\,a_{12} \tag{3.3}$$

schreiben oder mit $\omega = u + i\,v$ auch

$$\omega_{\bar{z}} = J\,\overline{\omega_{\bar{z}}}\,, \qquad J = \frac{-1 + i\,H}{1 + i\,H}\,.$$

4. Integrabilitätsbedingungen

Aus (1.1) mit $A \in C^1(G)$ und dem inversen System

$$\operatorname{grad} v = A^{-1} \operatorname{grad} u \tag{4.1}$$

erhalten wir für Lösungen $(u, v) \in C^2(G)$ die Integrabilitätsbedingungen

$$(a_{21}\,v_x + a_{22}\,v_y)_x - (a_{11}\,v_x + a_{12}\,v_y)_y = 0 \tag{4.2}$$

und

$$[D^{-1}\,(a_{21}\,u_x - a_{11}\,u_y)]_x + [D^{-1}\,(a_{22}\,u_x - a_{12}\,u_y)]_y = 0 \tag{4.3}$$

mit $D = \det A$.

Für konstantes A haben diese beiden Gleichungen dieselbe Form. Auch für $A = A_{II}$ gilt dies. Wir betrachten im folgenden $A = A_I$. Dann erhalten wir

$$\Delta v + (\alpha_x \cot\alpha + \alpha_y)\,v_x + (\alpha_y \cot\alpha - \alpha_x)\,v_y = 0 \tag{4.4}$$

und eine ähnliche Gleichung für u, die genau die Form (4.4) (mit u statt v) annimmt, wenn man y durch $\eta = -y$ ersetzt. Wir brauchen also nur eine dieser beiden Gleichungen zu betrachten, etwa (4.4).

Für (4.4) leiten wir in Abschnitt 6 eine explizite Lösungsdarstellung mittels Bergman-Operatoren her. Dies bereiten wir jetzt vor. Wir setzen $A = A_I \in C^\omega(G)$ (also A holomorph in G) voraus, lassen komplexe x und y zu und setzen

$$z = x + i\,y\,, \qquad z^* = x - i\,y\,.$$

Für reelle x und y sind z und $z^* = \bar{z}$ konjugiert. Für komplexe x und y können wir z und z^* als neue unabhängige Variable benutzen und (4.4) überführen in die Form

$$2 \sin \alpha \, v_{zz^*} + e^{-i\alpha} \alpha_{z^*} v_z + e^{i\alpha} \alpha_z v_{z^*} = 0$$

oder

$$(e^{i\alpha} v_{z^*})_z - (e^{-i\alpha} v_z)_{z^*} = 0$$

oder auch

$$v_{zz^*} + \frac{i\alpha_{z^*}}{e^{2i\alpha} - 1} v_z + \frac{i\alpha_z}{1 - e^{-2i\alpha}} v_{z^*} = 0 \,. \tag{4.5}$$

Der Einfachheit halber haben wir hier v als Funktion von z, z^* wieder mit v bezeichnet. Eine einzelne der beiden ersten partiellen Ableitungen in (4.5) kann man stets eliminieren, indem man in bekannter Weise $v = hw$ setzt und h geeignet bestimmt. Beide erste Ableitungen kann man dann und nur dann aus (4.5) gleichzeitig eliminieren, wenn $\alpha_{zz^*} = 0$ ist, also α die Form

$$\alpha(z, z^*) = \alpha_1(z) + \alpha_2(z^*) \tag{4.6}$$

hat. Der Beweis ergibt sich durch direkte Rechnung oder auch auf dem Weg über die Laplaceschen Invarianten. Die transformierte Gleichung ist

$$w_{zz^*} + \frac{\alpha_1'(z) \, \alpha_2'(z^*)}{4 \sin^2 \alpha(z, z^*)} w = 0 \,.$$

Der Strich bezeichnet dabei die Ableitung nach der jeweiligen Variablen. Diese reduzierte Form der Gleichung können wir weiterhin zugrundelegen, und zwar betrachten wir im folgenden den wichtigen linearen Fall

$$\alpha(z, z^*) = k\,(z + z^*) + \pi/2 \,, \tag{4.7}$$

also die Gleichung

$$Lw = w_{zz^*} + \frac{k^2/4}{\cos^2 (k\,(z + z^*))} w = 0 \,. \tag{4.8}$$

Dieser lineare Fall spielt z.B. auch in der Hydrodynamik (bei Approximationen der Poisson-Adiabate) eine Rolle; wir gehen hierauf im letzten Abschnitt kurz ein.

5. Bergman-Operatoren

Wir wollen für (4.8) einen Bergman-Operator angeben. Dazu brauchen wir die folgenden Grundtatsachen:

Bergman-Operatoren B sind lineare Operatoren auf dem Raum der Funktionen f, die in einem gegebenen Gebiet G der komplexen Ebene mit $0 \in G$ holomorph sind, in den Raum der Lösungen v einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung $Lv = 0$. S. Bergman [2] hat diese Operatoren eingeführt, um eine Möglichkeit zu schaffen, aus funktionentheoretischen Methoden und Sätzen eine Charakterisierung allgemeiner Eigenschaften von Klassen von Lösungen einer Gleichung $Lv = 0$ zu erhalten, z.B. Aussagen über den Regularitätsbereich, Lage und Art von Singularitäten, das Koeffizientenproblem usw. Und man erhält solche Klassen von Lösungen, indem man B auf gewisse Klassen von Funktionen (z.B. meromorphe Funktionen) anwendet. Gleichung (4.8) hat die Form

$$Lv = v_{zz^*} + b(z, z^*) \, v_{z^*} + c(z, z^*) \, v = 0 \,. \tag{5.1}$$

Sind die Koeffizienten b und c holomorphe Funktionen von z, z^* in einem Gebiet $D = D_1 \times D_2$ $(0 \in D_1$, D_1 ein Sterngebiet), so lässt sich für (5.1) ein Bergman-Operator B definieren durch $v = Bf$, $f \in C^\omega(D_1)$, und

$$v(z, z^*) = (Bf)(z, z^*) = \int_{-1}^{1} g(z, z^*, t)\, f\left(\frac{1}{2} z (1-t^2)\right)(1-t^2)^{-1/2}\, dt\,, \tag{5.2}$$

wobei t reell ist. g nennen wir den *Bergman-Kern* oder *Kern* von B (*generating function* bei S. Bergman).

Es sei g eine Lösung der Gleichung

$$(1-t^2)\, g_{z^*t} - t^{-1} g_{z^*} + 2\, z\, t\, L\, g = 0 \tag{5.3}$$

in einem Gebiet $K := D \times I$, $I = (-1, 1)$, $D = D_1 \times D_2$ mit

$$D_1 = \{z \mid |z| < \varrho, \varrho > 0 \text{ fest}\}\,, \qquad D_2 = \{z^* \mid |z| < \varrho\}\,.$$

Weiter gelte

$$(1-t^2)^{1/2}\, g_{z^*} \to 0 \qquad (t \to \pm 1)$$

gleichmässig in D, und es sei $g_{z^*}/t\,z$ stetig in $D \times I$. Dann ist (5.2) eine Lösung von (5.1) in D. Und jede in einer Umgebung des Nullpunktes holomorphe Lösung von (5.1) lässt sich darstellen in der Form

$$v = B_1 f_1 + B_2 f_2\,; \tag{5.4}$$

hierbei hat $B_1 f_1$ die Form (5.2) mit $g = g_1$ und einer Funktion $f = f_1$, die in einer Umgebung des Nullpunktes der z-Ebene holomorph ist; $B_2 f_2$ hat auch die Form (5.2) mit $g = g_2$ und einer Funktion $f = f_2$, die in einer Umgebung des Nullpunktes der z^*-Ebene holomorph ist. Vgl. S. Bergman [2]. Formel (5.4) bezeichnen wir kurz als *zweigliedrigen Ansatz.*

6. Bergman-Operator für (4.8)

Die Gleichung (4.8) ist ein Sonderfall der Gleichung

$$w_{zz^*} - \frac{\nu(\nu+1)\,\alpha_1'(z)\,\alpha_2'(z^*)}{\sin^2\left(\alpha_1(z) + \alpha_2(z^*)\right)}\, w = 0\,, \tag{6.1}$$

der $\nu = -1/2$ und $\alpha(z, z^*) = k\,(z + z^*) + \pi/2$ entspricht. Die Transformation

$$z_1 = \exp\left(2\, i\, \alpha_1(z) - i\,\pi/2\right)\,, \qquad z_2 = \exp\left(2\, i\, \alpha_2(z^*) - i\,\pi/2\right)$$

würde auf die oft untersuchte Gleichung

$$w_{z_1 z_2} + \nu(\nu+1)\,(1 + z_1 z_2)^{-2}\, w = 0 \tag{6.2}$$

führen (vgl. [1, 6, 14]). Aber das nützte uns nichts, denn aus dem Bergman-Kern in [6] ergibt sich bei Rücktransformation kein Bergman-Kern für (6.1). Dies folgt aus dem leicht zu beweisenden

Hilfssatz 1. *Ein Bergman-Kern für*

$$w_{zz^*} + c(z, z^*)\, w = 0 \tag{6.3}$$

geht bei einer Transformation

$$z_1 = h_1(z)\,, \qquad z_2 = h_2(z^*)$$

dann und nur dann in einen Bergman-Kern für die transformierte Gleichung über, wenn $h_1(z) = \gamma z$ mit konstantem γ ist.

Um einen Bergman-Operator für (4.8) zu gewinnen, gehen wir direkt vor. g wird als Potenzreihe in t angesetzt mit Koeffizienten, die von z, z^* abhängen. Deren Rekursion fällt besonders einfach aus, wenn wir

$$g(z, z^*, t) = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-2z)^\mu}{1 \cdot 3 \cdots (2\mu - 1)} p_{2\mu}(z, z^*) t^{2\mu} \tag{6.4}$$

ansetzen. Substitution in (5.3) ergibt dann nämlich

$$p_{2, z^*}(z, z^*) = c(z, z^*) \tag{6.5a}$$

$$p_{2\mu+2, z^*}(z, z^*) = (L p_{2\mu})(z, z^*), \quad \mu = 1, 2, \ldots. \tag{6.5b}$$

Dass (6.4) nur gerade Potenzen von t enthält, bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit, wie man aus (5.2) erkennt. Eine nähere Betrachtung der Form des rekursiven Differentialgleichungssystems (6.5) im Falle der Gleichung (4.8) führt auf die Idee, die Koeffizientenfunktionen $p_{2\mu}$ als Polynome in

$$q(z, z^*) = \tan\alpha_0, \quad \alpha_0 = k(z + z^*),$$

anzusetzen. Dann wird

$$p_2(z, z^*) = \frac{k}{4} q(z, z^*).$$

Aus (6.5b) erhalten wir nun

$$p_{2\mu+2} = k\dot{p}_{2\mu}(1 + q^2) + \frac{k}{4}\int p_{2\mu}\, dq + h_{\mu+1} \tag{6.6}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach q bezeichnet und $h_{\mu+1}$ eine willkürliche Funktion von z ist. Über die h_μ verfügen wir jeweils so, dass die $p_{2\mu}$ kein von q freies Glied enthalten. Weiterhin legt (6.6) den Versuch nahe, $p_{2\mu}$ vom Grade μ in q zu wählen, also nun insgesamt den Ansatz

$$p_{2\mu}(z, z^*) = \sum_{\sigma=1}^{\mu} \lambda_{2\mu,\sigma} q(z, z^*)^\sigma, \quad \mu = 1, 2, \ldots, \tag{6.7}$$

zu machen. Dies führt beim Einsetzen in (6.6) zum Ziel. In der Tat folgt die Existenz der Darstellung (6.7) daraus, dass sich die Konstanten $\lambda_{2\mu,\sigma}$ aus der folgenden einfachen Rekursion ergeben:

$$\lambda_{2,1} = k/4$$

$$\lambda_{2\mu+2,0} = 0, \quad \lambda_{2\mu,\rho} = 0 \; (\varrho < 0, \; \varrho > \mu)$$

$$\lambda_{2\mu+2,r} = k\left\{\frac{1}{r}\left(r - \frac{1}{2}\right)^2 \lambda_{2\mu,r-1} + (r+1)\lambda_{2\mu,r+1}\right\}, \tag{6.8}$$

$$r = \mu + 1, \quad \mu - 1, \ldots, \mu + 1 - 2[\mu/2].$$

Damit ist die explizite Bestimmung eines Bergman-Operators für (4.8) geleistet, und wir haben zusammenfassend den

Satz 3. *Die Integrabilitätsbedingung* (4.4) *des Systems* (1.1) *mit* $A = A_I$ *lässt sich genau dann gleichzeitig von beiden ersten partiellen Ableitungen befreien, wenn* (4.6) *gilt.*

Für $\alpha(z, z^*)$ gemäss (4.7) erhält man die transformierte Gleichung (4.8). Ein zugehöriger Bergman-Operator für eine Lösungsdarstellung (5.2) hat den Kern (6.4) mit Koeffizientenfunktionen (6.7) und Konstanten $\lambda_{2\mu,\sigma}$ gemäss (6.8).

7. Vorkommen der betrachteten Gleichungen in der Hydrodynamik

Wir sind von differentialgeometrischen Fragen her auf Systeme der Form (1.1) geführt worden. Einen anderen Zugang zu (1.1) und den betrachteten Gleichungen zweiter Ordnung bieten gewisse zweidimensionale hydrodynamische Probleme. Hierauf wollen wir abschliessend noch kurz eingehen.

In der xy-Ebene liege ein Profil vor, das von einer kompressiblen, nichtviskosen Flüssigkeit stationär und wirbelfrei mit der Geschwindigkeit ω_0 in der positiven x-Richtung angeströmt wird. Zirkulation sei nicht vorhanden, und es handle sich um eine reine Unterschallströmung. Für die Geschwindigkeit ω gelte also überall $\omega < \gamma = \sqrt{dp/d\varrho}$. Hierbei ist γ die lokale Schallgeschwindigkeit, p der Druck und ϱ die Dichte. Dann existieren im Aussengebiet des Profils ein *Geschwindigkeitspotential* u und eine *Stromfunktion* v, und diese beiden Funktionen sind Lösungen des Systems (2.4) mit

$$a(x, y) = 1/\varrho(x, y)\,. \tag{7.1}$$

Die dem Anströmungszustand entsprechende Dichte haben wir dabei zu 1 normiert. Nun benutzen wir die Polarkoordinaten ω (= Geschwindigkeit) und Θ (= Winkel des Geschwindigkeitsvektors mit der x-Achse) der Hodographenebene und bezeichnen u, v, als Funktionen von ω, Θ, einfach wieder mit u, v. Dann folgt (zur Herleitung vgl. R. v. Mises [11], S. 250)

$$\begin{aligned} u_\omega &= \omega^{-1}(M^2 - 1)\, a v_\theta \\ u_\theta &= \omega a v_\omega\,. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Hierbei ist $M = \omega/\gamma$ die lokale Mach-Zahl, und $a = 1/\varrho$ ist eine gegebene Funktion von ω. Als Integrabilitätsbedingung für (7.2) erhalten wir

$$(1 - M^2)\, a v_{\theta\theta} + \omega\,(\omega a v_\omega)_\omega = 0 \tag{7.3}$$

und eine ähnliche Gleichung für u. Von ω gehen wir zu der Variablen

$$\eta = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega^{-1}(1 - M^2)^{1/2}\, d\tilde{\omega}$$

über. Mit der Bezeichnung $h^2 = (1 - M^2)^{1/2} a$ folgt dann aus (7.3)

$$h^2 v_{\theta\theta} + (h^2 v_\eta)_\eta = 0\,.$$

Die *reduzierte Stromfunktion*

$$\tilde{v}(\eta, \Theta) = h(\eta)\, v(\eta, \Theta)$$

erfüllt also die Gleichung

$$\Delta\tilde{v} + \sigma(\eta)\,\tilde{v} = 0 \qquad \text{mit} \qquad \sigma(\eta) = -h''(\eta)/h(\eta)\,. \tag{7.4}$$

σ hängt von der Form der Druck-Dichte-Beziehung ab. Für die Falkowitsch-Approximation der Poisson-Adiabate (vgl. S. V. Falkowitsch [4], E. Lanckau [10]) wird

$$\sigma(\eta) = \frac{k_0}{\sinh^2(2(\eta - \eta_0))}\,. \tag{7.5}$$

Setzen wir nun

$$z = \eta - \eta_0 + i\,\Theta\,, \qquad z^* = \eta - \eta_0 - i\,\Theta\,,$$

so gewinnt die Gleichung (7.4) mit σ gemäss (7.5) die Gestalt (6.1), und zwar erhält man gerade den linearen Fall $\alpha_1(z) = i\,z$, $\alpha_2(z^*) = i\,z^*$. Für ν ergibt sich $\nu\,(\nu + 1) = -k_0/4$; man kann also ν derart wählen, dass man eine möglichst gute Näherung für die Poisson-Adiabate erhält. Erwin Kreyszig, University of Windsor, Ont.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. W. Bauer und E. Peschl, *Ein allgemeiner Entwicklungssatz für die Lösungen der Differentialgleichung* $(1 + \varepsilon_{z\bar{z}})^2\, w_{z\bar{z}} + \varepsilon n\,(n+1)\, w = 0$ *in der Nähe isolierter Singularitäten.* Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München (1965).
[2] S. Bergman, *Integral Operators in the Theory of Linear Partial Differential Equations*, 2nd rev. print., (Berlin 1969).
[3] L. Bers, *An Outline of the Theory of Pseudoanalytic Functions*, Bull. Amer. Math. Soc. *62*, 291–331 (1956).
[4] S. V. Falkowitsch, *On the Theory of the Laval Nozzle*, Inst. Mech. Acad. Sci. USSR. Appl. Math. Mech. *10*, 503–512.
[5] G. Kneis, *Eine kanonische Gestalt für indefinite quadratische Differentialformen und globale Darstellungen für negativ gekrümmte Flächen im* R^3, Diss. (Halle 1971).
[6] M. Kracht und E. Kreyszig, *Bergman-Operatoren mit Polynomen als Erzeugenden*, Manuscripta math. *1*, 369–376 (1969).
[7] E. Kreyszig, *Die Realteil- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen*, El. Math. *24*, 25–31 (1968).
[8] E. Kreyszig und A. Pendl, *Über die Gauss-Krümmung der Real- und Imaginärteilflächen analytischer Funktionen*, El. Math. *28*, 10–13 (1973).
[9] H. P. Künzi, *Quasikonforme Abbildungen* (Berlin 1960).
[10] E. Lanckau, *Eine Anwendung der Bergmanschen Operatorenmethode auf Profilströmungen im Unterschall*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden *8*, 200–207 (1958/59).
[11] R. v. Mises, *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow* (New York 1958).
[12] C. B. Morrey, *On the Solutions of Quasi-linear Elliptic Partial Differential Equations*, Trans. Amer. Math. Soc. *43*, 126–166 (1938).
[13] I. N. Vekua, *Verallgemeinerte analytische Funktionen* (Berlin 1963).
[14] I. N. Vekua, *New Methods for Solving Elliptic Equations* (New York 1967).

On a Cubic Functional Equation defined on Groups

I. Introduction

The following factorization yields the conditional identity $a^3 + b^3 + c^3 = 3\,a\,b\,c$ for real numbers a, b and c with $a + b + c = 0$.

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 + c^3 - 3\,a\,b\,c \\ &= (a + b + c)\;(a^2 + b^2 + c^2 - a\,b - b\,c - c\,a) \\ &= \frac{1}{2}(a + b + c)\;[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2] \\ &= (a + b + c)\;(a + b\,\omega + c\,\omega^2)\;(a + b\,\omega^2 + c\,\omega) \qquad (1) \end{aligned}$$

where $\omega = -(1/2)\,(1 - \sqrt{3}\,i)$ is a complex root of unity.

As an analogy, the following functional equation is proposed and studied

$$f^3(x\,y^{-1}) + f^3(y\,z^{-1}) + f^3(z\,x^{-1}) = 3\,f(x\,y^{-1})\,f(y\,z^{-1})\,f(z\,x^{-1}) \qquad (2)$$