Aufgaben

Aufgabe 697. Es sei p eine beliebige Primzahl. Man bestimme alle endlichen Gruppen, in denen jedes Element die p-te Potenz eines Elements der Gruppe ist.

P. Wilker, Bern

Lösung: Für eine endliche Gruppe G der Ordnung n setzen wir $G^p := \{g^p \mid g \in G\}$ und behaupten, dass $p \nmid n$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für $G^p = G$ ist.

1. Es sei $p \nmid n$. Dann gilt mit passenden ganzen Zahlen x, y die Beziehung $xp + yn = 1$. Hieraus folgt $g = g^{xp+yn} = (g^x)^p$ für alle $g \in G$.

2. Es sei $p \mid n$. Nach einem Satz von Galois (bewiesen von Cauchy; vgl. etwa A. Speiser, *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 3. Aufl., p. 64ff.) enthält G ein Element der Ordnung p. Wir wählen in G nun ein Element a der Ordnung p^r mit grösstmöglichem r. Dann ist also $r \geq 1$. Es gilt offenbar $a \notin G^p$; denn aus $a = b^p$ würde folgen, dass b die Ordnung p^{r+1} habe, im Widerspruch zur Festlegung von r. Damit ist der Beweis beendet.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Eine weitere Lösung sandte J. Binz (Bern).

Aufgabe 698. Es bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$k\,[\varphi(m\,n) - \varphi(m)\,\varphi(n)] = m\,n$$

in natürlichen Zahlen k, m und n.

W. R. Umbach, Rottorf, BRD

Lösung des Aufgabenstellers: Da die Eulersche φ-Funktion multiplikativ ist, kann obige Gleichung nur für $(m, n) > 1$ erfüllt sein. Deshalb setzen wir

$$m = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i} \cdot P,\ n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i} \cdot Q \quad \text{mit} \quad (P, Q) = (PQ, p_1 \cdots p_r) = 1,\ p_i \text{ prim},$$

$r, \alpha_i, \beta_i \in \mathbf{N}$ und erhalten

$$(*) \quad k = \frac{\prod_{i=1}^{r} p_i^2 \cdot PQ}{\prod_{i=1}^{r} (p_i - 1) \left\{\prod_{i=1}^{r} p_i - \prod_{i=1}^{r} (p_i - 1)\right\} \cdot \varphi\,(PQ)} = \frac{u}{v}.$$

Für $p_1 = 2$ ist $PQ \equiv 1 \pmod 2$, und wegen $u \equiv 4 \pmod 8$ folgt $r \leq 2$. Für $r = 1$ gilt $k = 4\,PQ/\varphi\,(PQ)$. Ist $PQ = 1$, so erhalten wir die Lösungen

$$k = 4, \quad m = 2^\alpha, \quad n = 2^\beta.$$

Für $PQ = q^\varkappa$ folgt $k = 4\,q/(q-1)$, was nur für $q = 3$ und $q = 5$ ganz ist. Damit erhalten wir die weiteren Lösungen

$$k = 5, \quad m = 2^\alpha, \quad n = 2^\beta \cdot 5^\gamma \text{ und}$$

$$k = 6, \quad m = 2^\alpha, \quad n = 2^\beta \cdot 3^\gamma.$$

Da PQ höchstens zwei verschiedene Primteiler $3 \leq q_1 < q_2$ besitzen kann, erhalten wir für $PQ = q_1^{\varkappa_1} q_2^{\varkappa_2}$ noch $k = q_1 \cdot q_2/((q_1 - 1)/2) \cdot ((q_2 - 1)/2)$, was nur ganz ist, wenn $q_1 = (q_2 - 1)/2$ und $(q_1 - 1)/2 = 1$, d.h. $q_1 = 3$ und $q_2 = 7$ ist. Das liefert die Lösungen

$$k = 7, \quad m = 2^\alpha, \quad n = 2^\beta \cdot 3^\gamma \cdot 7^\delta \text{ und}$$

$$k = 7, \quad m = 2^\alpha \cdot 3^\gamma, \quad n = 2^\beta \cdot 7^\delta .$$

Für $r = 2$ folgt aus (*) zunächst $\varphi(PQ) = 1$, d.h. $PQ = 1$. Aus $k = 4 p_2^2/(p_2^2 - 1)$ folgt dann der Widerspruch $(p_2^2 - 1) \mid 4$.

Für den verbleibenden Fall $p_1 \geq 3$ folgt $PQ \equiv 0 \pmod 2$. Deshalb setzen wir $PQ = 2^\varkappa \cdot \prod_{j=1}^{s} q_j^{\varkappa_j}$ mit $s \geq 0$. Dann folgt aus (*) wegen $u \equiv 2 \pmod 4$ sofort $s = 0$ und $r = 1$. Also bleibt $k = 2 p_1^2/(p_1 - 1)$, was nur für $p_1 = 3$ ganz ist. Somit erhalten wir noch die Lösungen

$$k = 9, \quad m = 3^\alpha, \quad n = 3^\beta \cdot 2^\gamma .$$

Die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ können dabei völlig unabhängig voneinander alle natürlichen Zahlen durchlaufen.

Weitere Lösungen sandten H. Harborth (Braunschweig, BRD) und H. Warncke (Porto Alegre, Brasilien). Drei weitere Einsendungen enthielten unvollständige Lösungen.

Aufgabe 699. Bezeichnen a, b, c die Seitenlängen, R den Umkreisradius und r den Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{(bc+ca+ab)^2} \geq 1$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$. A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung: The r.h.h. (right hand half) inequality follows immediately by two applications of Cauchy's inequality, i.e.,

$$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3) \geq (a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \geq (ab+bc+ca)^2$$

with equality iff $a = b = c$. The l.h.h. inequality is equivalent to $R^2 \geq (abc \sum a^3)/(\sum bc)^2$ and is a special case of

$$(w_1 + w_2 + w_3)(w_1 R_1^2 + w_2 R_2^2 + w_3 R_3^2) \geq (w_2 w_3 a_1^2 + w_3 w_1 a_2^2 + w_1 w_2 a_3^2) \quad (1)$$

where w_i are arbitrary real weights, a_i and R_i are the sides and distances from an arbitrary point to the vertices, respectively, of a given triangle. The latter follows from the well known result in mechanics that the polar moment of inertia of a set of weights is a minimum about the centroid of the weights with equality *iff* the point and the centroid coincide [1], [2]. The special case corresponds to $R_i = R$, $w_i a_i = \Pi a_i$, $i = 1, 2, 3$. To show the equality case only for equilateral triangles is somewhat troublesome. In order that the centroid of the latter set of weights coincide with the circumcenter, $a^2\{b^4 + c^4 + bc(b^2 + c^2 - a^2)\}$ which is proportional to R^2 must remain invariant under cyclic interchange of a, b, c. By taking differences and then differences again, the only real solution is $a = b = c$.

Remarks: Inequality (1) is also equivalent to the known inequalities or Wolstenholme, Kooi, Oppenheim, Tomescu and Klamkin and the large number of inequalities which follow as special cases has been pointed out in [3]. (1) is also a special case $n = 2$ of the master inequality

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq (-1)^{n+1}\{2\,y\,z\cos n\,A + 2\,z\,x\cos n\,B + 2\,x\,y\cos n\,C\}$$

where n is integral, x, y, z real and A, B, C are angles of a triangle [3].

REFERENCES

[1] M. S. KLAMKIN, *Geometric Inequalities via the Polar Moment of Inertia*, Ford Motor Company Preprint, Sept. 1973.

[2] M. S. KLAMKIN, *Non-negative Quadratic Forms and Triangle Inequalities*, Ford Motor Company Preprint, June 1971. (Also, see Notices of Am. Math. Soc., Oct. 1971, p. 96.)

[3] M. S. KLAMKIN, *Asymmetric Triangle Inequalities*, Publ. Electrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. Univ. Beograd, No. 357–380 (1971), 33–44.

M. S. Klamkin, Ann Arbor, Michigan, USA

Weitere Lösungen sandten G. Bercea (München, BRD), E. Braune (Linz, Donau, Österreich), H. Kappus (Rodersdorf SO) und I. Paasche (München, BRD).

Anmerkung der Redaktion: G. Bercea und der Aufgabensteller verwenden für die Herleitung der linksseitigen Ungleichung eine Methode mit baryzentrischen Koordinaten (vgl. dazu etwa O. BOTTEMA et al., *Geometric Inequalities*, Groningen 1968, p. 121–122, 14. 1.).

Aufgabe 700. Bezüglich eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems sei die Kurve K gegeben durch $K = \{(x, x^3) \mid -\infty < x < \infty\}$. Unter allen Ellipsen, die K in zwei Punkten oskulieren, ermittle man diejenige mit der kleinsten numerischen Exzentrizität.

C. Bindschedler, Küsnacht ZH

Lösung: Es sei

$$Q(x, y) = a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,x\,y + a_{22}\,y^2 + 2\,a_1\,x + 2\,a_2\,y + a_0 = 0 \tag{1}$$

die Gleichung eines die Kurve K in 2 Punkten (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2) oskulierenden Kegelschnittes. Dann muss das Polynom

$$f(x) =: Q(x, x^3) = a_{22}\,x^6 + 2\,a_{12}\,x^4 + 2\,a_2\,x^3 + a_{11}\,x^2 + 2\,a_1\,x + a_0$$

die beiden 3fachen Nullstellen ξ_1, ξ_2 haben, also von der Form

$$f(x) = a_{22}\,(x - \xi_1)^3\,(x - \xi_2)^3$$

sein. Koeffizientenvergleich ergibt zunächst $\xi_2 = -\xi_1$. Setzen wir zur Vereinfachung $\xi_1 = \xi$ und verabreden $\xi \geq 0$, so haben wir weiter

$$2\,a_{12} = -3\,a_{22}\,\xi^2,\ a_{11} = 3\,a_{22}\,\xi^4,\ a_0 = -a_{22}\,\xi^6,\ a_1 = a_2 = 0\,.$$

Die Gleichung (1) hat also die Gestalt

$$3\,\xi^4\,x^2 - 3\,\xi^2\,x\,y + y^2 - \xi^6 = 0\,. \tag{2}$$

Die zugehörige Säkulargleichung

$$\lambda^2 - (3\,\xi^4 + 1)\,\lambda + \frac{3}{4}\,\xi^4 = 0$$

hat die beiden reellen positiven Lösungen

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\,[3\,\xi^4 + 1 \pm \left((3\,\xi^4 + 1)^2 - 3\,\xi^4\right)^{1/2}]\,.$$

Somit stellt (2) eine 1parametrige Schar von Ellipsen mit Mittelpunkt (0,0) dar. Wegen

$$\varepsilon^2 = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

wird ε minimal, wenn der Quotient $h(\xi) = \lambda_1/\lambda_2$ sein Maximum annimmt. Es ist $h(0) = 0$, $\lim_{\xi \to \infty} h(\xi) = 0$. Ferner ergibt eine einfache Rechnung als einzige positive Nullstelle von $h'(\xi)$ den Wert

$$\xi = 3^{-1/4}\,.$$

Dieser liefert also das Maximum von $h(\xi)$, d.h. das Minimum von ε. Nach (2) lautet somit die Gleichung der gesuchten Ellipse

$$\sqrt{27}\,(x^2 + y^2) - 9\,x\,y = 1\,.$$

Ihre Hauptachsen sind um 45° gegen die Koordinatenachsen gedreht. Längen der Halbachsen:

$$a^2 = \frac{1}{9}\,(4\sqrt{3} + 6)\,, \quad a = 1.1985\,,$$

$$b^2 = \frac{1}{9}\,(4\sqrt{3} - 6)\,, \quad b = 0.3211\,.$$

Numerische Exzentrizität:

$$\varepsilon = (4\sqrt{3} - 6)^{1/2} = 0.9634\,.$$

H. Kappus, Rodersdorf SO

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben in Maschinenschrift erbeten bis **10. Februar 1975.** Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601 A (Band 25, p. 67), Problem 625 B (Band 25, p. 68), Problem 645 A (Band 26, p. 46), Problem 672 A (Band 27, p. 68), Aufgabe 680 (Band 27, p. 116), Problem 724 A (Band 29, p. 99).

Aufgabe 721. The question whether, for an integer $n > 1$, $\varphi(n) \mid (n-1)$ implies that n is a prime, is open (cf., e.g., American Math. Monthly *80*, 192–193 [1973]). Show that if $n = 2^{2^s} + 1$ $(s \geq 0)$ and $\varphi(n) \mid (n-1)$, then n is a prime.

J. Steinig, Genève

Aufgabe 722. Man beweise die Gültigkeit von

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{n^2 + k^2} = \frac{1}{4}\,(\pi - \ln 4)\,.$$

G. Bercea, München, BRD

Aufgabe 723. On donne deux cercles Γ_1 et Γ_2, ayant O et K' comme centres de similitude externe et interne; une droite OAB et le cercle Γ tangent en A et B aux cercles Γ_1 et Γ_2. Quel est le lieu du point z, intersection de la polaire de K' par rapport à Γ et de la droite OAB ?

J. Quoniam, St-Etienne, France

Aufgabe 724. Es seien k, m, n $(k < n)$ natürliche Zahlen und $\nu(m)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von m. Man beweise: Für $n > (1+\varepsilon)^k$ gilt $\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geq n - c_\varepsilon$, wo c_ε nur von der positiven reellen Zahl ε abhängt.

P. Erdös, Budapest

Problem 724A. Gibt es eine natürliche Zahl $k_0(\varepsilon)$ derart, dass, in der Bezeichnung der Aufgabe 724, gilt

$$\nu\left(\binom{n}{k}\right) \geq n \quad \text{für alle} \quad k \geq k_0(\varepsilon) \ ?$$

Die Antwort ist dem Aufgabensteller nicht bekannt.

P. Erdös, Budapest

Literaturüberschau

Calculus of Finite Differences. Von A. O. Gel'fond. 451 Seiten. $10.–. Hindustan Publ. Co., Delhi 1971.

Das vorliegende Buch ist eine in Indien gedruckte englische Übersetzung des in den Ostblockländern als Standardwerk (3 Auflagen) erschienenen Lehrbuches über endliche Differenzenmethoden des russischen Mathematikers A. O. Gel'fond. Der Schwerpunkt des Werkes liegt in der Behandlung von Funktionen einer komplexen Variablen. Der Inhalt erstreckt sich über nachstehende Gebiete: Einführung in die Theorie der endlichen Differenzen, Interpolation und Approximation, Newtonsche Reihen, numerische Integration, Differenzengleichungen. Das Buch ist wohl klar geschrieben, reflektiert aber leider nicht gerade den neuesten Stand der Kenntnisse. Die Behandlung z. B. der Approximationstheorie beschränkt sich auf die gleichmässige Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome, ohne die Beschreibung von Charakterisierungssätzen oder von Algorithmen, bleibt also hier auf einem Stand, der höchstens dem Wissen der dreissiger Jahre entspricht. Letzteres spiegelt sich auch im eher kümmerlichen Literaturverzeichnis.

J. T. Marti

Digitale Berechnungen in der elementaren Netzwerktheorie. Von Lawrence P. Huelsman. 224 Seiten. 109 Bilder. 15 Tabellen. DM 46,–. R. Oldenbourg, Wien 1972.

Die englische Originalausgabe trägt den Titel «Digital Computations in Basic Circuit Theory». Die deutsche Übersetzung besorgte Wolfgang Georgi, dipl. math., Ravensburg.

Das vorliegende Buch wendet sich an Studierende der Elektrotechnik. Es setzt eingehende Kenntnisse der Analyse elektrischer Netzwerke, das hierfür notwendige mathematische Instrumentarium in Analysis und linearer Algebra, sowie die wichtigsten Methoden der numerischen Mathematik voraus. Vorkenntnisse im Einsatz von Rechenanlagen sollten vorhanden sein. Das Buch benützt FORTRAN als Programmiersprache. Studierenden, denen diese Sprache nicht bekannt ist, wird sie in einem Anhang dargestellt.

Der Verfasser erörtert vorerst den Gebrauch von *Function-* und *Subroutine*-Unterprogrammen in FORTRAN. In den Kapiteln 2 bis 5 wird die Analyse linearer und nichtlinearer Schaltelemente und einfacher Kombinationen derselben behandelt. Methodisch wird dabei nach einem einheitlichen Schema vorgegangen. Aufstellen der Beziehungen zwischen den Netzwerkgrössen in analytischer Form. Beschreibung der Lösung. Angabe der numerischen Lösungsverfahren mit Hinweis auf den Gültigkeitsbereich. Darlegung der *Subroutine*-Unterprogramme. Vollständige Durchrechnung eines Beispiels. In Kapitel 6 und 7 werden die numerischen Lösungsverfahren auf Differentialgleichungssysteme, die in Matrizenform dargestellt sind, ausgedehnt. Kapitel 8 bis 10 schliesslich behandeln Netzwerke im komplexen Frequenzbereich. Eine Zusammenfassung am Schluss eines jeden Kapitels macht auf die wichtigsten Gedankengänge aufmerksam und erleichtert damit die Übersicht.

Das vorliegende Buch ist didaktisch hervorragend aufgebaut und flüssig geschrieben. Es kann dem Studierenden der Elektrotechnik etwa ab 2. bis 3. Semester zur Ergänzung und Verknüpfung der propaedeutischen Lehrveranstaltungen bestens empfohlen werden.

H. Baggenstos

Metrische Räume. Von H. Belkner. 140 Seiten. 28 Figuren. M 8,70. Mathematische Schülerbücherei Nr. 65. BSB B. G. Teubner, Leipzig 1972.