

# Das Tanzkursproblem

Autor(en): **Bachofner, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 5

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-29460>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

6. Ist  $\prod_{j=1}^m R_{i_j}$  KMP von  $R$  der Länge  $n$  mit  $i_m = n$ , so gilt  $\prod_{j=1}^m R_{i_j} = R_n$ . Also ist  $\prod_{i=1}^m R_{i_j} = R_n = R_{n-1} \circ R = 0$ , da  $R_{n-1} \subseteq Z(R)$  für das KMP  $R_{n-1}$  von  $R$  der Länge  $n-1$  gilt.

Nach 4. bis 6. ist jedes KMP von  $R$  der Länge  $n$  gleich 0.

Wir beweisen nun den Hauptsatz, indem wir für alle  $n \in N$  zeigen:

*${}_n R = 0$  genau dann, wenn alle KMP von  $R$  der Länge  $n$  gleich 0 sind.*

Beweis: Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:

- a) Die Aussage ist für  $n = 1$  trivial für alle Ringe  $R$ .  
 b) Wir nehmen die Richtigkeit der Aussage für  $n = k$  für alle Ringe  $R$  an und schließen auf  $n = k + 1$ :

${}_{k+1}R = 0$  genau dann (nach Satz 2), wenn  ${}_k R \subseteq Z(R)$

(d.h.  ${}_k(R/Z(R)) = 0$  [3; S.62]), genau dann (nach Annahme), wenn  $\prod_{j=1}^m R_{i_j} \subseteq Z(R)$  für

jedes KMP von  $R$  der Länge  $k$  (d.h.  $\prod_{j=1}^m (R/Z(R))_{i_j} = 0$  für jedes KMP von  $R/Z(R)$

der Länge  $k$ ), genau dann (nach Satz 3), wenn  $\prod_{j=1}^m R_{i_j} = 0$  für jedes KMP von  $R$  der Länge  $k + 1$ .

W. Streb, Essen, BRD

#### LITERATURVERZEICHNIS:

- [1] S. A. JENNINGS, *On Rings whose Associated Lie Rings are Nilpotent*, Bull. Am. Math. Soc. 53, 593–597 (1947).  
 [2] S. A. JENNINGS, *Central Chains of Ideals in an Associative Ring*, Duke Math. J. 9, 341–355 (1942).  
 [3] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra, erster Teil* (Springer-Verlag, 1960).  
 [4] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra, zweiter Teil* (Springer-Verlag, 1959).  
 [5] W. STREB, *Über Algebren mit nilpotenten assoziierten Lie-Ringen*, R. c. Semin. mat. Univ. Padova XLVI, S. 137–139 (1971).

## Elementarmathematik und Didaktik

### Das Tanzkursproblem

Im Rahmen eines Seminars über elementare mathematische Probleme an der Universität Basel warf Prof. Scarpellini im Zusammenhang mit dem Heiratssatz<sup>1)</sup> das Tanzkursproblem auf, das ihm ein Volkswirtschaftler vorgelegt hatte. Für beide war das Problem offen. In diesem Beitrag wird eine konstruktive Lösung des Tanzkursproblems dargelegt.

<sup>1)</sup> Vgl. etwa K. Jacobs: *Selecta Mathematica I*, Heidelberger Taschenbuch, Bd. 49, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

## A. Problemstellung

An einem Tanzkurs nehmen  $n$  Damen und  $n$  Herren teil. Jeder Teilnehmer hat eine Präferenzordnung der Partner, d. h., jede Dame und jeder Herr weiss genau, mit wem sie bzw. er am liebsten, am zweitliebsten usw. tanzen würde. Der Tanzmeister, der diese Präferenzordnungen kennt, hat nun die Aufgabe, die Teilnehmer so zu Paaren zu kombinieren, dass keine «gefährdeten» Paare auftreten. Zwei Paare heissen gefährdet, wenn der Herr des ersten Paares lieber mit der Dame des zweiten Paares als mit seiner Dame und gleichzeitig die Dame des zweiten Paares lieber mit dem Herrn des ersten Paares als mit ihrem Herrn tanzen würde (oder umgekehrt). Es besteht dann die Gefahr, dass diese beiden ihre zugeteilten Partner verlassen und ein neues Paar bilden.

Die Frage lautet nun: Ist die Aufgabe des Tanzmeisters bei beliebigem  $n$  und bei beliebig vorgegebenen  $2n$  Präferenzlisten lösbar?

Man ist versucht, von einer beliebigen Zuordnung der Partner auszugehen und durch Partnervertauschungen die gefährdeten Paare zu eliminieren. Es zeigt sich aber, dass man schon mit nur drei Paaren eine zyklische Kette von Vertauschungen finden kann, so dass man also nach endlich vielen Schritten wieder die Anfangskombination erreicht.

Ein analoges Problem ist die Besetzung von Arbeitsplätzen mit Arbeitern unter Berücksichtigung einerseits der Beliebtheit der Arbeitsplätze und andererseits der Eignung der Arbeiter.

Hier wird die Lösbarkeit des Problems durch eine induktive Konstruktion gezeigt werden.

## B. Beweis

Wir bezeichnen die Damen mit  $D_1, \dots, D_n$ , die Herren mit  $H_1, \dots, H_n$  und das von  $H_i$  und  $D_k$  gebildete Paar mit  $(H_i, D_k)$ .

### 1. Verankerung

Wir geben dem Herrn  $H_1$  die Dame, die auf seiner Liste an erster Stelle steht (mit der er also am liebsten tanzt). Sei dies o.B.d.A. die Dame  $D_1$ . Dadurch ist gesichert, dass  $H_1$  seine Dame nicht wegen einer noch nicht vergebenen Dame verlassen wird.

### 2. Bildung des zweiten Paares

Für die Dame  $D_k$ , mit der  $H_2$  am liebsten tanzt, gibt es zwei Möglichkeiten:

*Fall a:*  $k \neq 1$ : o.B.d.A.  $k = 2$ . Wir bilden das Paar  $(H_2, D_2)$ . Die beiden bisher gebildeten Paare sind nicht gefährdet, denn die beiden Herren haben keinen Grund zum Tauschen. Auch die noch nicht vergebenen Damen geben keinen Anlass dazu.

*Fall b:*  $k = 1$ : Wir fragen  $D_1$ .

1. Sie zieht  $H_1$  dem  $H_2$  vor.

Wir geben  $H_2$  die Dame, die auf seiner Liste an zweiter Stelle steht (o.B.d.A.  $D_2$ ). Die beiden bisher gebildeten Paare sind nicht gefährdet, denn sowohl  $H_1$  wie  $D_1$  haben keinen Grund zum Tauschen. Ferner geben die noch nicht vergebenen Damen den beiden Herren keinen Anlass dazu.

2. Sie zieht  $H_2$  dem  $H_1$  vor.

Wir lösen das Paar  $(H_1, D_1)$  auf und bilden das Paar  $(H_2, D_1)$ . Durch Umnummerieren der beiden Herren erhalten wir das Paar  $(H_1, D_1)$  und  $H_2$ . Jetzt sind wir in Fall 1.

### 3. Induktionsvoraussetzung

Es seien schon  $m$  Paare  $(H_1, D_1), \dots, (H_m, D_m)$  gebildet ( $m < n$ ). Folgende Voraussetzungen sollen gelten:

(I) Keine zwei Paare sind gefährdet.

(II) Die Herren  $H_1, \dots, H_m$  ziehen ihre Damen den noch nicht vergebenen Damen vor.

### 4. Induktionsschritt

Wir gehen die Liste des Herrn  $H_{m+1}$  von oben nach unten durch. Wir suchen die erste Stelle, für die (III) *nicht* gilt:

(III) Die dort aufgeführte Dame ist schon vergeben und zieht ihren Herrn dem Herrn  $H_{m+1}$  vor.

Da noch nicht alle Damen vergeben sind, existiert eine solche erste Stelle. Die dort aufgeführte Dame sei  $D_k$ . Also gilt:

(IV) Alle Damen, die  $H_{m+1}$  der Dame  $D_k$  vorziehen würde, sind schon vergeben und ziehen ihren Partner dem  $H_{m+1}$  vor.

Für die Dame  $D_k$  gilt entweder (V) oder (VI):

(V) Sie ist noch nicht vergeben.

(VI) Sie ist schon vergeben, aber möchte lieber zu  $H_{m+1}$  wechseln.

(V) und (VI) schliessen sich gegenseitig aus.

*Fall 1:* (V) trifft zu, also  $k > m$ . Sei o.B.d.A.  $k = m + 1$ . Wir bilden das Paar  $(H_{m+1}, D_{m+1})$ . Nach (II) und (V) gilt: Die Dame  $D_{m+1}$  veranlasst keinen der Herren  $H_1, \dots, H_m$  zum Wechseln.

Nach (IV) gilt:  $H_{m+1}$  hat ebenfalls keine Chance zum Wechseln. Zusammen mit (I) bedeutet das, dass keine zwei gefährdeten Paare vorkommen.

Ferner gilt nach (IV): Die noch nicht vergebenen Damen geben  $H_{m+1}$  keinen Anlass zum Wechseln. Zusammen mit (II) liefert das die zu beweisenden Eigenschaften.

*Fall 2:* (VI) trifft zu. Wir lösen das Paar  $(H_k, D_k)$  auf und bilden das Paar  $(H_{m+1}, D_k)$ . Unter den jetzt vorhandenen  $m$  Paaren sind keine gefährdeten, einerseits nach (I), andererseits nach (VI) (die Herren, die vorher nicht zu  $D_k$  wechseln konnten, können jetzt erst recht nicht mehr, denn  $D_k$  konnte sich ja verbessern!) sowie nach (IV). Ferner gilt nach (II) und (IV): Die mit einer Dame versehenen Herren ziehen diese den noch nicht vergebenen Damen vor. Durch Vertauschen der Nummern von  $H_k$  und  $H_{m+1}$  erhalten wir wieder die Induktionsvoraussetzung. Wir führen den Induktionsschritt mit dem neuen Herrn  $H_{m+1}$  aus. Falls wir in Fall 1 kommen, sind wir fertig. Wenn wieder Fall 2 eintritt, müssen wir nochmals anfangen. Wir können jetzt aber zeigen, dass wir nur endlich oft in Fall 2 kommen können! Dazu betrachten wir die Listen der Damen  $D_1, \dots, D_m$ . Jedesmal, wenn wir in Fall 2 kommen, kann sich eine dieser Damen verbessern. Jede Dame kann sich natürlich höchstens  $m$  mal

verbessern, denn spätestens nach  $m$  Schritten hat sie den ihr liebsten der  $m + 1$  Herren erreicht. Total sind also höchstens  $m^2$  Schritte möglich. Also müssen wir einmal in Fall 1 kommen!

### C. Bemerkungen

Der Prozess funktioniert auch, wenn mehr Damen als Herren vorhanden sind. Es bleiben nach (II) nur Damen übrig, die die gebildeten Paare nicht stören.

Bei unendlich vielen Teilnehmern braucht das Verfahren nicht anwendbar zu sein, obwohl es Kombinationen ohne gefährdete Paare gibt. (Beispiel: Jeder Teilnehmer möchte einen Partner mit möglichst hoher Nummer; die Kombination  $(H_1, D_1), (H_2, D_2), \dots, (H_k, D_k), \dots$  enthält keine gefährdeten Paare). Andererseits kann man sich bei unendlich vielen Teilnehmern Systeme von Präferenzlisten vorstellen, für die die Induktion durchführbar ist, bei denen es aber unmöglich ist, alle Teilnehmer in einer Kombination ohne gefährdete Paare unterzubringen. (Beispiel: Die Herren möchten Partnerinnen mit möglichst kleiner Nummer, die Damen wünschen sich Herren mit möglichst hohen Nummern. Man sieht leicht, dass es keine unendliche Kombination ohne gefährdete Paare geben kann: Wir nehmen an,  $(H_i, D_k)$  und  $(H_j, D_m)$  seien zwei Paare einer Kombination ohne gefährdete Paare. Für  $j < i$  gibt es höchstens  $i - 1$  Möglichkeiten; ist  $j > i$ , dann muss  $m < k$  sein, sonst würden  $H_j$  und  $D_k$  wechseln. Also kommen höchstens  $i + k - 1$  Paare vor.)

Eine hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Verfahrens bei abzählbar unendlich vielen Teilnehmern ist

- a) Die Listen der Herren haben ein zu der Menge der natürlichen Zahlen ordnungsisomorphes Anfangsstück und
- b) Die Listen der Damen sind wohlgeordnet.

Bedingung a) ermöglicht die Bildung der Paare, Bedingung b) garantiert eine Art «Konvergenz»: Die Menge aller Herren, die eine Dame je als Partner gehabt hat, hat ein erstes Element bezüglich ihrer Liste. Dieser Herr wurde ihr bei einem bestimmten Induktionsschritt zugeordnet und bleibt nach Konstruktion auch bei den folgenden Schritten ihr Partner, da sich Damen beim Induktionsschritt nur verbessern können.

Allerdings ist nicht garantiert, dass alle Damen berücksichtigt werden, was man an einfachen, die Bedingungen erfüllenden Beispielen sieht.

H. Bachofner, Aarburg

### Über eine Bemerkung J. Steiners

E. Müller hat auf eine Bemerkung Steiners aufmerksam gemacht, «dass die verschiedenartigsten Erscheinungen der Raumwelt miteinander verbunden sind», und als Beispiel u. a. die linearen Systeme von Kegelschnitten und Quadriken genannt. So lässt sich z. B. eine Fülle von Sätzen, die allein Kegelschnitte betreffen, aus wenigen allgemeinen Sätzen durch Spezialisierung herleiten. Dabei kann ein Kegelschnitt, fasst man ihn als Erzeugnis seiner Punkte auf, in ein Geradenpaar oder in eine Doppelgerade zerfallen, fasst man ihn aber als Erzeugnis seiner Tangenten auf, so kann er in ein Punktepaar oder in einen Doppelpunkt zerfallen, an die ebenfalls Tangenten gezogen werden können.