Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 4

PDF erstellt am: **07.05.2024**

und

$$L(f) := \sup_{\gamma \in E} v_f(\gamma) ;$$

f heisst *rektifizierbar,* wenn $L(f) < \infty$ ist.

Lemma. Jede Menge $Q \subseteq R$, die sich als Bild einer rektifizierbaren Abbildung von I in R darstellen lässt (= *rektifizierbare Teilmenge von* R), ist total beschränkt.

Beweis. Ist Q nicht total beschränkt, so gibt es ein $r_0 > 0$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es Punkte $q_1, q_2, \ldots, q_m \in Q$ mit

$$q_j \notin \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{m} B(q_i, r_0) \qquad (1 \leq j \leq m) ;$$

d.h., es ist $d(q_i, q_j) \geq r_0$ für $i \neq j$. Dabei ist $B(q, r)$ die abgeschlossene Kugel mit dem Mittelpunkt $q \in R$ und dem Radius $r \geq 0$. Für jede Abbildung $f: I \to R$ mit $f(I) = Q$ ist somit v_f unbeschränkt und daher $L(f) = \infty$. Q kann daher nicht rektifizierbare Teilmenge von R sein. q.e.d.

Anmerkung. Dieses Lemma verallgemeinert Lemma 2 in [2] und beantwortet zugleich eine dort noch offen gebliebene Frage im positiven Sinn.

Zum Abschluss formulieren wir das folgende

Problem. Man charakterisiere die rektifizierbaren Teilmengen aus R durch metrische Eigenschaften.

MaW., welche metrischen Eigenschaften muss eine total beschränkte Teilmenge Q von R besitzen, so dass eine Abbildung $f: I \to R$ mit $f(I) = Q$ existiert, für die v_f beschränkt ist. Das Vorbild zu dieser Fragestellung liefert der bekannte Satz von HAHN-MAZURKIEWICZ (z.B. [1], 337), der eine rein *topologische* Charakterisierung der Peanoschen Teilmengen eines *topologischen* Hausdorffraumes angibt

R. Z. Domiaty, Graz.

LITERATUR

[1] H. F. CULLEN, *Introduction to General Topology* Boston, 1968).
[2] R. Z. DOMIATY, *Zur Topologisierung metrischer Räume,* II. Proc. Colloq. Topology, Keszthely, 1972 (im Druck).

Aufgaben

Aufgabe 673. Let Φ denote a permutation of $Z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ and let $F(\Phi)$ denote the number of fixed points of Φ. Show that

$$\sum_{\Phi} (F(\Phi))^k = n!\ A_k \qquad (0 \leq k \leq n) ,$$

where A_k is the number of partitions of Z_k and the summation is over all permutations of Z_n. L. Carlitz and R. A. Scoville, Durham, N. C., USA

Solution. Let D_n be the number of derangements of n symbols.
Then $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-i} = n!$ and therefore

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m \frac{x^m}{m!} = \frac{e^{-x}}{1-x}. \tag{1}$$

Now

$$A(n, k) := \frac{1}{n!} \sum_{\Phi} (F(\Phi))^k = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D_{n-i}\, i^k$$

and, by (1), this is the coefficient of x^n in

$$\frac{e^{-x}}{1-x} \sum_{i=0}^{\infty} i^k \frac{x^i}{i!}. \tag{2}$$

A well-known consequence of the recurrence relation for the Stirling numbers of the second kind is

$$e^x \sum_{m=1}^{k} S(k, m)\, x^m = \left(x \frac{d}{dx}\right)^k e^x = \sum_{i=0}^{\infty} i^k \frac{x^i}{i!}. \tag{3}$$

From (2) and (3) we then find that $A(n, k)$ is the coefficient of x^n in

$$(1-x)^{-1} \sum_{m=1}^{k} S(k, m)\, x^m$$

and for $n \geq k$ this coefficient is $\sum_{m=1}^{k} S(k, m)$ which is A_k (cf. Handbook of Math. Functions, Nat. Bur. Standards, 1964).

J. H. van Lint, Eindhoven, Niederlande

Aufgabe 674. a, b, c seien die Seitenlängen eines Dreiecks. Ist $ax = b + c$, h_x die Höhe auf a und r_x der Inkreisradius des Dreiecks, so gilt

$$2 < h_x^x (x\, r_x)^{-x} < e.$$

Man beweise diese Behauptung und zeige, dass die Schranken die bestmöglichen sind.

F. Leuenberger, Feldmeilen, ZH

Lösung: Es gelten $x = (b + c)/a$, $x + 1 = 2\,s/a$, $h_x\, a/2 = r_x\, s$, also $h_x = r_x\,(x + 1)$ und schliesslich $h_x^x (x\, r_x)^{-x} = (1 + 1/x)^x := f(x)$. Wie man leicht überlegt, ist $1 < x < \infty$. Daraus ergibt sich aufgrund des monotonen Wachstums von f auf $(1, \infty)$ als bestmögliche Abschätzung $2 < f(x) < e$, w.z.b.w.

R. Weissauer, Ludwigshafen, BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), H. Harborth (Braunschweig, BRD), H. Kappus (Rodersdorf, SO), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD).

Anmerkung des Aufgabenstellers: Bezeichnet r'_x den Radius des die Dreiecksseite der Länge a berührenden Ankreises, so gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$0 < h_x^x (x\, r'_x)^{-x} < \frac{1}{e}$$

mit bestmöglichen Schranken.

Aufgabe 675. Man beweise für jedes Dreieck (mit den üblichen Abkürzungen) die folgende Kette von Ungleichungen:

$$4\,\Sigma \tan\frac{\alpha}{2} \le \sqrt{3} + \Sigma \cot\frac{\alpha}{2} \le 2\,\Sigma \csc\alpha\,,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn das Dreieck gleichseitig ist.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Lösung: Es bedeuten: R Umkreisradius, r Inkreisradius und r_a, r_b, r_c die Ankreisradien. Wegen

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r_a}{s} = \frac{r}{s-a} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{2\,F}{b\,c}$$

ist die behauptete Ungleichungskette äquivalent zur Kette

$$4\,\frac{r_a + r_b + r_c}{s} \le \sqrt{3} + \frac{s}{r} \le \frac{a\,b + b\,c + c\,a}{F},$$

und diese wegen $r_a + r_b + r_c = 4\,R + r$, $F = r\,s$ und $a\,b + b\,c + c\,a = s^2 + r\,(4\,R + r)$ (siehe [1], Formel 4) zu

$$4\,r\,(4\,R + r) \le \sqrt{3}\,F + s^2 \le s^2 + r\,(4\,R + r)\,. \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) wird bewiesen in [1] (Formel 21). Für den Beweis der linken Ungleichung der Kette (1) multiplizieren wir $3\sqrt{3}\,r \le s$ mit $\sqrt{3}$ und addieren auf beiden Seiten $16\,R - 5\,r - \sqrt{3}\,s$. Wir erhalten damit

$$4\,(4\,R + r) - \sqrt{3}\,s \le 16\,R - 5\,r$$

oder

$$4\,r\,(4\,R + r) - \sqrt{3}\,F \le r\,(16\,R - 5\,r)\,.$$

Nach [1], Formel 14, ist $r\,(16\,R - 5\,r) \le s^2$ (Gleichheit genau für das gleichseitige Dreieck), womit der Beweis von (1) gegeben ist.

[1] J. Steinig, *Inequalities Concerning the Inradius and Circumradius of a Triangle*, El. Math. *18* (1963), 127–131.

P. Hohler, Olten

Weitere Lösungen sandten L. Bankoff (Los Angeles, California, USA), H. Kappus (Rodersdorf, SO), P. Nüesch (Lausanne) und I. Paasche (München, BRD).

Aufgabe 676. Mit Primzahlen p und natürlichen Zahlen n sei

$$\pi(n) := \sum_{p \leq n} 1 \quad \text{und} \quad \varrho(n) := \sum_{\substack{(i,n)=1 \\ i=p \leq n}} 1 .$$

Welche Lösungen hat die Gleichung $n = \varrho(n) \cdot \sqrt{\pi(n)}$?

H. Harborth, Braunschweig, BRD

Lösung: Aus der Definition von $\varrho(n)$ folgt

$$\varrho(n) = \pi(n) - v(n) \quad \text{mit} \quad v(n) := \sum_{\substack{p \\ p \mid n}} 1 ;$$

aus dem Fundamentalsatz folgt $v(n) \leq (\log n)/\log 2$ für $n \geq 1$; nach [1, Theorem 1] ist $\pi(n) \geq n/\log n$ für $n \geq 59$. Für $n \geq 2^8$ sieht man nach einfacher Rechnung

$$\varrho(n) \geq n/\log n - (\log n)/\log 2 \geq \bigl(1 - (\log 2)/4\bigr)\, n/\log n .$$

Daher ist für $n \geq 2^8$ wegen $\log 2 \leq 0{,}6932$:

$$\varrho(n)\, (\pi(n))^{1/2} \geq n \left[\left(1 - \frac{\log 2}{4}\right) \left(\frac{n}{\log^3 n}\right)^{1/2}\right] \geq n \left(1 - \frac{\log 2}{4}\right) (2 \log^3 2)^{-1/2} > n ;$$

also hat die vorgelegte Gleichung

$$n = \varrho(n)\, (\pi(n))^{1/2} \tag{1}$$

höchstens dann Lösungen, wenn $1 \leq n \leq 255$. Hat (1) eine Lösung, so muss $\pi(n)$ eine Quadratzahl s^2 sein; wegen $\pi(255) = 54$ (vgl. [2, Tabelle 1]) können nur solche n Lösungen von (1) sein, für die $\pi(n)$ gleich einer der Zahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ist; nun ist $s = (\pi(n))^{1/2}$ genau dann resp. gleich 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, wenn n resp. gleich 2; 7, ..., 10; 23, ..., 28; 53, ..., 58; 97, ..., 100; 151, ..., 156; 227, 228 ist [2, Tabelle 1]. Nach (1) muss $s \mid n$ gelten; dadurch kommen nur noch folgende n als Lösungen von (1) in Frage: 2; 8, 10; 24, 27; 56; 100; 156; –. Diese acht Werte prüft man einzeln durch und stellt fest, dass (1) die einzige Lösung $n = 56$ hat.

[1] J. B. Rosser, and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers.* Illinois J. Math. *6*, 64–94 (1962).

[2] W. Schwarz, *Einführung in Methoden und Ergebnisse der Primzahltheorie.* Mannheim-Wien-Zürich: Bibliographisches Institut 1969.

P. Bundschuh, Freiburg i. Br., BRD

Weitere Lösungen sandten J. H. van Lint (Eindhoven, Niederlande) und E. Teuffel (Korntal, BRD).

Anmerkung der Redaktion: Der Aufgabensteller argumentiert mit der Ungleichung

$$\frac{x}{\ln x - 1/2} < \pi(x) < \frac{x}{\ln x - 3/2} \quad [x \geq 67] ,$$

welche in der oben zitierten Arbeit [1], Theorem 2, oder in W. Sierpiński, Elementary theory of numbers, Warschau 1964, p. 153, gefunden werden kann.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Februar 1974,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Bei Redaktionsschluss dieses Heftes sind noch ungelöst: Problem 601A (Band 25, p. 67), Problem 625B (Band 25, p. 68), Problem 645A (Band 26, p. 46), Problem 664A (Band 27, p. 19), Problem 672A (Band 27, p. 68), Problem 692A (Band 28, p. 48), Problem 700A (Band 28, p. 102).

Aufgabe 697. Es sei p eine beliebige Primzahl. Man bestimme alle endlichen Gruppen, in denen jedes Element die p-te Potenz eines Elements der Gruppe ist.

P. Wilker, Bern

Aufgabe 698. Es bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion. Man bestimme alle Lösungen der Gleichung

$$k\,[\varphi(m\,n) - \varphi(m)\,\varphi(n)] = m\,n$$

in natürlichen Zahlen k, m und n.

W. R. Umbach, Rottorf, BRD

Aufgabe 699. Bezeichnen a, b, c die Seitenlängen, R den Umkreisradius und r den Inkreisradius eines Dreiecks, so gilt

$$\frac{R}{2r} \geq \frac{(a+b+c)\,(a^3+b^3+c^3)}{(b\,c+c\,a+a\,b)^2} \geq 1$$

mit Gleichheit genau für $a = b = c$.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Aufgabe 700. Bezüglich eines ebenen rechtwinkligen Koordinatensystems sei die Kurve K gegeben durch $K = \{(x, x^3) \mid -\infty < x < \infty\}$. Unter allen Ellipsen, die K in zwei Punkten oskulieren, ermittle man diejenige mit der kleinsten numerischen Exzentrizität.

C. Bindschedler, Küsnacht, ZH

Problem 700A. In ein «grosses» Quadrat sollen n «kleine» Quadrate der Seitenlängen $1, 2, \ldots, n$ seitenparallel so eingebettet werden, dass je zwei kleine Quadrate höchstens Randpunkte gemeinsam haben. $N(n)$ bezeichne die minimale Seitenlänge des grossen Quadrats, die diese Einbettung ermöglicht. Es ist nicht schwer, einzusehen, dass $N(n) \leq n^{3/2}$ für alle $n \geq 3$ gilt.

a) Lässt sich ein Faktor k, $0 < k < 1$, so angeben, dass schon $N(n) \leq k\,n^{3/2}$ gilt?

b) Kann der Exponent 3/2 verkleinert werden, so dass also $N(n) \leq n^q$ für ein $q < 3/2$ zutrifft?

c) Gilt eine dieser beiden Möglichkeiten wenigstens für genügend grosse n?

Die Antworten sind dem Aufgabensteller nicht bekannt.

P. Wilker, Bern