Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 2

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Kleine Mitteilungen

Über das Verhalten der Gaußschen Krümmung bei Affinität

Es sei Σ ein C^2-Hyperflächenstück im R^n mit nicht verschwindender Krümmung. Wir nehmen für den Moment an, dass keine Tangentialebene von Σ den Ursprung enthält. Es sei K die Gaußsche Krümmung, p der Stützabstand (Abstand der Tangentialebene T_x des Punktes $x \in \Sigma$ vom Ursprung O), $d\Sigma$ das Flächenelement von Σ und $d\omega$ das der Einheitskugel. Ferner sei Σ^* die polar-reziproke Fläche für die Reziprozität bezüglich der Einheitskugel mit dem Mittelpunkt O. Unter unseren Voraussetzungen besteht eine Punkt-Transformation $\Sigma \to \Sigma^*$. Das Volumenelement, aufgespannt durch die Pyramide mit der Spitze O und dem Flächenelement $d\Sigma$ als Basis, ist

$$dV = \frac{1}{n} p \, d\Sigma .$$

Das entsprechende Volumenelement für Σ^* ist

$$dV^* = \frac{1}{n} p^{-n} \, d\omega = \frac{1}{n} K p^{-n} \, d\Sigma.$$

Da Σ und Σ^* kontragrediente Flächen sind, ist das Verhältnis $dV^* : dV = K p^{-n-1}$ *eine unimodular lineare Invariante.*

In einer nicht singulären linearen Transformation A erhalten wir aus Σ die Fläche Σ'. Alle Grössen bezüglich Σ' sollen mit $'$ bezeichnet werden. Die $(n-1)$-Flächeninhalte in den Hyperebenen parallel T_x sollen in der Transformation A mit dem Faktor $\lambda(x)$ multipliziert werden. Die Betrachtung einer Pyramide mit der Spitze O und Basis in T_x zeigt, dass in einer nicht singulären Transformation A,

$$|\det A| \, p = p' \, \lambda(x) .$$

Aus Dimensionsgründen wird

$$K' \, p'^{-n-1} = |\det A|^{-2} \, K p^{-n-1} .$$

Daher:

$$K' = \frac{|\det A|^{n-1}}{\lambda(x)^{n+1}} K .$$

Da eine Translation die Krümmung nicht ändert, gilt die Formel für jede nicht singuläre Affinität. Dadurch wird auch die Bedingung, dass keine Tangentialebene durch den Ursprung gehen darf, nachträglich wieder eleminiert.

Für $n = 2$ stammt die Formel von E. Trost [1]. Für $n = 3$ und projektive Abbildungen stammt die Formel im wesentlichen von A. Voss [2].

H. Guggenheimer, Polytechnic Institute of Brooklyn*)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. Trost, *Über das Verhalten des Krümmungsradius bei Affinität*, El. Math. *3*, 81–82 (1948).

[2] A. Voss, Math. Ann. *39*, 179 (1891).

*) Research partially supported by NSF Grant GP-27960

Eine verschärfte Ungleichung zwischen Volumen, Oberfläche und Inkugelradius im R^n

Sei K ein eigentlich konvexer Körper des R^n $(n \geq 2)$, $V = V(K)$ sein Volumen, $F = F(K)$ seine Oberfläche, $r = r(K)$ sein Inkugelradius und $V_i = V_i(K) = \varkappa_n r^n$ sein Inkugelvolumen. Dann gilt

Satz: $rF \geq V + (n-1)\, V_i$, und für $n \geq 3$ gilt Gleichheit nur für die Kugel.

Bemerkungen: Für $n = 2$ wurde der Satz von Bonnesen in [1] gezeigt, einen kurzen Beweis gibt auch Hadwiger in [2]. Für $n > 2$ wurde er von Wills (vgl. [6], [7]) vermutet. In [4] diskutiert Herz den Zusammenhang mit ähnlichen Ungleichungen und zeigt obigen Satz, falls $V(K) \leq (n+1)\, V_i(nK)/n$. In dieser Arbeit wird mit einer für eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung bereitgestellten, relativ komplizierten Abschätzung von Hadwiger [3] gezeigt, dass der Satz uneingeschränkt gilt.

In [5] wird von Fejes Tóth gezeigt, dass der Satz für n = 2 auch für nicht konvexe Körper (einfach zusammenhängende Polygone) richtig bleibt. Diese Erweiterung ist für $n \geq 3$ nicht richtig:

Sei $S = \{x / \mid x \mid \leq r\}$. Zu k Punkten $a_1, \ldots, a_k$ einer Folge $(a_i;\ i = 1, 2, \ldots)$ von auf der Kugeloberfläche $\{x / \mid x \mid = r\}$ dicht liegenden Punkten wähle man $\varepsilon = \varepsilon(k) > 0$ so, dass die Mengen $M_i = \{x / \mid x - \lambda a_i \mid < \lambda\varepsilon, 0 < \lambda \leq 1\}$ disjunkt sind. Der Inkugelradius r von $M = S \setminus \bigcup_{i=1}^{k} M_i$ strebt für $k \to \infty$ gegen 0. Man kann nun $\varepsilon(k)$ zusätzlich so wählen, dass $F(M) \to F(S)$ und $V(M) \to V(S)$ für $k \to \infty$ gilt. Also ist schon für ein endliches k die im Satz stehende Ungleichung nicht erfüllt.

Beweis: Sei $n \geq 3$. Es gilt nach [3] S. 270, (c)

$$V \leq (n^n \varkappa_n)^{-1/(n-1)} \left(F^{n/(n-1)} - (F^{1/(n-1)} - (n\, \varkappa_n)^{1/(n-1)}\, r)^n\right)$$

oder mit

$$c^{n-1} = \frac{F}{n\, \varkappa_n}$$

$$V \leq \varkappa_n \left(c^n - (c-r)^n\right)$$

und daher

$$rF - V - (n-1)\, \varkappa_n r^n \geq \varkappa_n \left(r\,(n-1)\,(c^{n-1} - r^{n-1}) + r\, c^{n-1} - c^n + (c-r)^n\right)$$

$$= \varkappa_n\, (c-r) \left(r\,(n-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} r^{n-1-\nu} c^{\nu-1} + (c-r)^{n-1} - c^{n-1}\right)$$

$$= \varkappa_n\, (c-r)\, r \sum_{\nu=1}^{n-1} \left((n-1)\, r^{n-1-\nu} - (c-r)^{n-1-\nu}\right) c^{\nu-1}$$

$$= \varkappa_n\, (c-r)\, r \sum_{\nu=1}^{n-2} \left((n-1)\, r^{n-1-\nu} + c^{n-1-\nu} - (c-r)^{n-1-\nu}\right) c^{\nu-1} \geq 0.$$

Die letzte Abschätzung folgt, da wegen $F \geq n\, \varkappa_n r^{n-1}$ $c \geq r$ gilt. Hierbei gilt Gleichheit nur für die Kugel.

J. Bokowski, TU Berlin

LITERATURVERZEICHNIS

[1] T. BONNESEN, *Über eine Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung des Kreises in der Ebene und auf der Kugeloberfläche nebst Anwendung auf eine Minkowskische Ungleichheit für konvexe Körper*, Math. Ann. *84*, 216–227 (1921).
[2] H. HADWIGER, *Kurzer Beweis der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Bereiche.* El. Math. *1–3*, 111–112 (1946–48).
[3] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1957).
[4] B. HERZ, *Über die Willssche Verallgemeinerung einer Ungleichung von Bonnesen*, Monatsh. f. Math. *75*, 316–319 (1971).
[5] L. FEJES TÓTH, *Elementarer Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung*, Acta Math. Aca. Scient. Hungar. *1*, 273–276 (1950).
[6] J.M. WILLS, Vortrag auf der DMV-Tagung über konvexe Körper, Juli 1970.
[7] J.M. WILLS, *Zum Verhältnis von Volumen und Oberfläche bei konvexen Körpern*, Arch. Math. *21*, 557–560 (1970).

Aufgaben

Aufgabe 665. Für nichtnegative ganze Zahlen n beweise man die Formel

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{1}{k!} = 1 .$$

I. Paasche, München

1. Lösung (mit Verallgemeinerung): **C**: = Menge der komplexen Zahlen, **N**: = $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

$$S_n(z) := \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} z^i \sum_{k=0}^{n-i} \frac{z^k}{k!} .$$

Durch die Substitution $j := i + k$ kann diese Doppelsumme über die Gitterpunkte (i, k) mit $0 \leq i + k \leq n$ auch als

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} z^j \cdot \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \frac{1}{i!\,(j-i)!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!} \sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}$$

geschrieben werden.

Wegen

$$\sum_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i} = \begin{cases} 0 \text{ für } j \neq 0 \\ 1 \text{ für } j = 0 \end{cases}$$

gilt für alle $z \in \mathbf{C}$, $n \in \mathbf{N}$: $S_n(z) = 1$. $z = 1$ ist der zu beweisende Spezialfall.

G. Bach, Braunschweig, BRD

Second solution (with generalization): If

$$S_n(a) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{a^i}{i!} \sum_{k=0}^{n-i} \frac{a^k}{k!} ,$$