Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **28 (1973)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Kleine Mitteilungen

Über geschlossene Raumkurven ohne einbeschriebenes Parallelogramm

Ein von H. Hadwiger gestelltes Problem[1]) lautet: Gibt es im dreidimensionalen euklidischen Raum eine geschlossene Jordankurve (topologisches Bild der Kreislinie), in die kein Parallelogramm einbeschrieben werden kann? In verschärfter Fassung sollen auch entartete Parallelogramme in dem Sinn ausgeschlossen sein, dass keine kollinearen äquidistanten Punktepaare auf der Kurve liegen (Abstand null natürlich ausgeschlossen). Wir zeigen, dass es in beiden Fällen Beispiele gibt, dass also nicht jeder geschlossenen Raumkurve ein Parallelogramm einbeschrieben werden kann.

Sei k Stück einer echten, gewöhnlichen Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder Z, das sich einmal halb um den Zylinder herumwindet. Wir verbinden die Endpunkte P, Q von k durch die Strecke $\overline{PQ}$ und erhalten so eine geschlossene Raumkurve S. Ein S einbeschriebenes echtes Parallelogramm hätte offenbar zwei Punkte auf k und zwei Punkte auf $\overline{PQ}$. Denkt man sich Z senkrecht zu einer Grundebene E, so hat aber die Gerade PQ bezüglich E grössere Steigung als die Verbindungsgerade irgend zweier Punkte von k, von denen höchstens einer P oder Q ist. Das gesuchte Parallelogramm kann es also nicht geben.

Nun liegen aber auf $\overline{PQ}$ noch ausgeartete Parallelogramme. Auch das kann man vermeiden: Sei $Z' \neq Z$ ein Kreiszylinder durch P, Q, dessen Achse zur Achse von Z parallel ist. Der Durchmesser von Z' ist dann grösser als der von Z. Wir verbinden P und Q auf Z' durch die kürzeste Linie k'. Diese ist wieder Teil einer Schraubenlinie. Haben zwei Punkte A, B auf k gleichen Abstand (> 0) wie zwei Punkte A', B' auf k', so sind die Steigungen der Geraden AB bzw $A'\,B'$ verschieden (die Steigungen hängen nur vom Abstand der Punkte auf k bzw. k' ab). Also gibt es wieder kein Parallelogramm, das $k \cup k'$ einbeschrieben ist.

Günter Ewald, Vancouver, Kanada

On Pyramidal Numbers of Order 4

A positive integer n is called a pseudoprime if $n \mid 2^n - 2$ and n is composite.

As the result of the questions raised by W. Sierpiński, I proved the following theorems:

1. There exist infinitely many triangular numbers which are at the same time pseudoprimes. The nth triangular number is the number $t_n = n\,(n+1)/2$. The least pseudoprime number which is at the same time triangular is the number $t_{33} = 3 \cdot 11 \cdot 17 = 561$ (see [1]).

---

[1]) Ungelöste Probleme, Nr. *53*, El. Math. *26*, 58 (1971).

2. There exist infinitely many pentagonal numbers which are at the same time pseudoprimes. The nth pentagonal number is the number $W_n = n(3n-1)/2$. The least pseudoprime number which is at the same time pentagonal is the number $W_{73} = 73 \cdot 109 = 7957$ (see [2]).

The n-th pyramidal number of order 4 is the number

$$P_4^n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

A. Danowski raised the question whether there exist pyramidal numbers of order 4 which are at the same time pseudoprimes. Here we shall prove the following:

Theorem. *If the numbers* $12m+1$, $18m+1$ *and* $36m+1$ *are primes, then the pyramidal number* P_4^n *for* $n = (2^{2(18m+1)} - 1)/3$ *is a pseudoprime number.*

Proof

Let $12\,m+1$, $18\,m+1$ and $36\,m+1$ be primes. Then

$$27\,(12\,m+1)(18\,m+1)(36\,m+1) \mid 2^{36m} - 1\,. \tag{1}$$

Let

$$n = \frac{2^{2(18m+1)} - 1}{3}.$$

Then

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2^{36m+1}+1}{3}, \qquad \frac{2n+1}{3} = \frac{2^{3(12m+1)}+1}{9}$$

and

$$P_4^n = \frac{2^{36m+1}+1}{3} \cdot \frac{2^{2(18m+1)}-1}{3} \cdot \frac{2^{3(12m+1)}+1}{9}.$$

From (1) it follows that

$$\frac{2^{36m+1}+1}{3}, \quad \frac{2^{2(18m+1)}-1}{3}, \quad \frac{2^{3(12m+1)}+1}{9} \equiv 1 \pmod{M},$$

where

$$M = 6\,(12\,m+1)(18\,m+1)(36\,m+1)\,.$$

Hence

$$P_4^n \equiv 1 \pmod{M}\,. \tag{2}$$

The numbers

$$\frac{2^{36m+1}+1}{3}, \quad \frac{2^{2(18m+1)}-1}{3}, \quad \frac{2^{3(12m+1)}+1}{9}.$$

are relatively prime in pairs, thus from (1) and (2) follows $P_4^n \mid 2^M - 1 \mid 2^{P_4^n - 1} - 1 \mid 2^{P_4^n} - 2$ for $n = (2^{2(18m+1)} - 1)/3$ and P_4^n is a pseudoprime number.

The Theorem is thus proved.

For $m = 1$ we get the following pyramidal number of order 4 which is pseudoprime.

$$P_4^{91625968981} = \frac{2^{37}+1}{3} \frac{2^{38}-1}{3} \frac{2^{39}+1}{9}$$

$$= 1777 \cdot 2731 \cdot 174763 \cdot 524287 \cdot 22366891 \cdot 25781083\,.$$

Further pyramidal numbers of order 4 which are at the same time pseudoprimes are obtained for $m = 15, 16, 45$.

There exist exactly 17 even numbers m less than 1333 for which each of the numbers $12m + 1$, $18m + 1$ and $36m + 1$ is a prime.

These are $m = 16, 56, 176, 206, 346, 350, 380, 470, 506, 540, 680, 710, 786, 946, 1156, 1200$ and 1326.

From the hypothesis H of A. Schinzel (see [3]) it follows that there exist infinitely many natural numbers m for which each of the numbers $12m + 1$, $18m + 1$ and $36m + 1$ is a prime.

Thus from our Theorem it follows

Corrollary. *From the hypothesis H of A. Schinzel concerning primes it follows that there exist infinitely many pyramidal numbers of order* 4 *which are at the same time pseudoprime numbers.*

A. Rotkiewicz, Warszawa

REFERENCES

[1] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers triangulaires*, El. Math. *19*, 82–83 (1964).

[2] A. Rotkiewicz, *Sur les nombres pseudopremiers pentagonaux*, Bull. Soc. Sci. Liège *33*, 261–263 (1964).

[3] A. Schinzel et W. Sierpiński, *Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers*, Acta Arith. *4*, 185–208 (1958).

Aufgaben

Aufgabe 662. Die untenstehenden Figuren stellen ein 8×4 Boss Puzzle dar, wobei die 31 Zahlentäfelchen einmal in natürlicher, einmal in umgekehrter Anordnung stehen. Es seien m, n natürliche Zahlen ≥ 2. Man zeige, dass beim $m \times n$-Boss Puzzle die natürliche Anordnung durch Verschieben von Zahlentäfelchen genau dann in die umgekehrte Anordnung übergeführt werden kann, wenn gilt: $mn \equiv 1$ oder $mn \equiv 2 \pmod 4$.

A. Herzer, Wiesbaden

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20
21	22	23	24
25	26	27	28
29	30	31	

31	30	29	28
27	26	25	24
23	22	21	20
19	18	17	16
15	14	13	12
11	10	9	8
7	6	5	4
3	2	1	