Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Ungelöste Probleme

Nr. 55. Vermutlich gilt die folgende Aussage: Hat ein Polytop, also ein kompaktes konvexes Polyeder P, des n-dimensionalen euklidischen Raumes die Eigenschaft, dass sich zu jeder seiner Seitenflächen noch wenigstens eine andere mit ihr disjunkte Seitenfläche aufweisen lässt, so gilt für die Anzahl f der Seitenflächen von P die Ungleichung $f \geqslant 2n$. Offensichtlich gilt Gleichheit beim Hyperwürfel, also beim $2n$-Zell. Demnach ist also $2n$ die kleinste mögliche Seitenflächenzahl für Polytope der oben genannten Eigenschaft. – Für $n = 1$ und $n = 2$ ist unsere Aussage trivialerweise richtig. Im Falle $n = 3$ kann man die Polytope mit $f < 6$ leicht ausmustern. Es gibt lediglich drei nicht isomorphe Typen, die durch das Tetraeder ($f = 4$), die Pyramide mit quadratischer Grundfläche ($f = 5$) und durch das gerade Prisma mit dreieckiger Grundfläche ($f = 5$) repräsentiert werden. Die aufgezählten Polytope haben die verlangte Eigenschaft ersichtlich nicht, so dass die Aussage auch hier zutrifft.

Seltsamerweise scheint es, dass die Abklärung, ob unsere Vermutung für alle Dimensionen n richtig ist oder nicht, viel schwieriger ist, als ein Konvexgeometer bei erster Konfrontation mit der Frage anzunehmen geneigt ist. Bereits einige haben sich vergeblich bemüht. B. GRÜNBAUM (Seattle) lässt uns wissen (Brief vom 17.10.71), dass die Aussage für $n = 4$ sicher noch stimmt. Dies ergibt die Kontrolle der Isomorphietypen mit $f < 8$ im vierdimensionalen Raum. Gilt dies für alle Dimensionen n?

H. Hadwiger

Kleine Mitteilungen

Eine Kennzeichnung der sphärischen Trochoidenbewegung

1. Bekanntlich besitzt der *Wendekreis* in der ebenen euklidischen Kinematik mehrere ihn kennzeichnende Eigenschaften, die in der sphärischen Kinematik auf verschiedene geometrische Orte führen[1]. Wir wollen uns hier mit dem erstmals von Schoenflies betrachteten *sphärischen Kegelschnitt* beschäftigen, welcher in der quadratischen Verwandtschaft zwischen gegebenem Punkt und zugehörigem Krümmungsmittelpunkt eine analoge Rolle spielt wie der Wendekreis in der ebenen Kinematik (vgl. [4], S. 56f.). Dieser (sphärische) *$\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitt* $\mathfrak{W}_s$[2] ist definitionsgemäss der Ort der Punkte X, deren Krümmungsmittelpunkte auf demjenigen Grosskreis liegen, dessen Ebene zur Geraden OP normal ist. O bezeichnet dabei den Kugelmittelpunkt und P den augenblicklichen *Drehpol*. Den Radius der Kugel nehmen wir wie üblich mit Eins an.

---

1) Vgl. [4], S. 59, [5], S. 57 und [8], S. 348.

2) Das «$\mathfrak{S}$» soll an Schoenflies erinnern. In der Getriebetechnik ist statt $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitt die Bezeichnung *Äquatorialkegelschnitt* üblich.