Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Paare (v, w) mit dem kgV n zu erhalten, setzen wir

$$(v, w) = \big(c\,a, c\,(a + b)\big) .$$

Aus den Lösungen (v, w), $v < w$, des 4. Problems erhalten wir die Lösungen des 1. Problems, indem wir setzen:

$$c = ggT(v, w) , \quad a = \frac{v}{ggT(v,w)} , \quad b = \frac{w - v}{ggT(v,w)} .$$

Den Beweis dazu überlassen wir dem Leser. P. Hohler, Olten

LITERATUR

[1] L. Bernstein, *Aufgabe 472*, El. Math. *20*, 15–16 (1965).
[2] J. Binz und P. Wilker, *Mathematischer Problemwettbewerb* 1969–70 im Kanton Bern, El. Math. *26*, 93–95 (1971).

Aufgaben

Aufgabe 658. If k is a positive integer and φ and J_k are the totient functions of Euler and Jordan, then show that for every positive integer n

$$J_k(n) = \sum_{d_1 d_2 \ldots d_k = n} \varphi(d_1)\, \varphi(d_2^2) \ldots \varphi(d_k^k) ,$$

where the summation extends over all ordered k-tuples $(d_1, \ldots, d_k)$ such that $d_1 \cdot \ldots \cdot d_k = n$. D. Suryanarayana, Waltair, India

Lösung: Nach W. Sierpiński, Elementary Theory of Numbers, p. 241, ist

$$J_k(1) = 1 , \quad J_k(n) = n^k \prod_{p \mid n} (1 - p^{-k}) \quad \text{für} \quad n > 1 ; \tag{1}$$

hieraus ersieht man die Multiplikativität von J_k und ferner $J_1(n) = \varphi(n)$ für alle $n \geq 1$, womit die behauptete Darstellung von $J_k(n)$ für $k = 1$ bewiesen ist. Sie sei bereits für $k \geq 1$ und alle $n \geq 1$ bekannt. Sei p eine Primzahl, s eine natürliche Zahl; dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_{k+1}) \\ d_1 \ldots d_{k+1} = p^s}} \varphi(d_1) \ldots \varphi(d_{k+1}^{k+1}) = \sum_{d_{k+1} \mid p^s} \varphi(d_{k+1}^{k+1}) \sum_{\substack{(d_1,\ldots,d_k) \\ d_1 \ldots d_k = p^s / d_{k+1}}} \varphi(d_1) \ldots \varphi(d_k^k)$$

$$= \sum_{d_{k+1} \mid p^s} \varphi(d_{k+1}^{k+1})\, J_k\!\left(\frac{p^s}{d_{k+1}}\right) = \sum_{\sigma=0}^{s} \varphi(p^{\sigma(k+1)})\, J_k(p^{s-\sigma})$$

$$= p^{sk}\,(1 - p^{-k}) + \sum_{\sigma=1}^{s-1} p^{\sigma(k+1)}\,(1 - p^{-1})\, p^{(s-\sigma)k}\,(1 - p^{-k}) + p^{s(k+1)}\,(1 - p^{-1})$$

$$= p^{s(k+1)}\,(1 - p^{-(k+1)}) = J_{k+1}(p^s) .$$

Dabei wurde zweimal (1) benutzt; somit ist die behauptete Darstellung von $J_{k+1}(n)$ bewiesen, wenn n entweder gleich 1 oder eine Primzahlpotenz ist. Aus der Multiplikativität von J_{k+1} und von φ folgt die Behauptung dann im allgemeinen Fall.

P. Bundschuh, Freiburg i.Br., BRD

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), L. Carlitz (Durham, N.C., USA) und E. Trost (Zürich).

Anmerkung der Redaktion: A. Makowski (Warszawa) bemerkt, dass dieselbe Behauptung auch in der Note P. Kesava Menon, An expression for Jordan function $\varphi_k(N)$ in terms of Euler function $\varphi(N)$, The Mathematics Student 9 (1941), p. 92, bewiesen wurde.

Aufgabe 659. Let L and M denote the sets of positive integers all of whose prime factors are of multiplicity ≥ 2 and ≥ 4, respectively. The integer 1 is considered to be a member of both L and M. Show that for every positive integer k

$$\sum_{n\in L} \frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \zeta(2\,k) \quad \text{and} \quad \sum_{n\in M} \frac{\lambda(n)}{J_k(n)} = \frac{\zeta(4\,k)\,\zeta(6\,k)}{\zeta(12\,k)},$$

where λ is Liouville's function and J_k Jordan's totient function.

D. Suryanarayana, Waltair, India

Lösung: Die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \zeta(s) = \prod_p (1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1} \quad (s > 1)$$

ist wohlbekannt. Da $\lambda(n)\,J_k^{-1}(n)$ eine multiplikative Funktion ist, die für $n = 1$ den Wert 1 annimmt, ergibt sich in gleicher Weise

$$\begin{aligned}\sum_{n\in L} \lambda(n)\,J_k^{-1}(n) &= \prod_p [1 + (p^{-2k} - p^{-3k} + \ldots)\,(1 - p^{-k})^{-1}] \\ &= \prod_p [1 + p^{-2k}\,(1 + p^{-k})^{-1}\,(1 - p^{-k})^{-1}] \\ &= \prod_p (1 - p^{-2k})^{-1} = \zeta(2k)\,.\end{aligned}$$

Im zweiten Fall haben wir

$$\begin{aligned}\sum_{n\in M} \lambda(n)\,J_k^{-1}(n) &= \prod_p [1 + (p^{-4k} - p^{-5k} + \ldots)\,(1 - p^{-k})^{-1}] \\ &= \prod_p [1 + p^{-4k}\,(1 - p^{-2k})^{-1}] \\ &= \prod_p (1 + p^{-6k})\,(1 - p^{-4k})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - p^{-12k})\,(1 - p^{-6k})^{-1}\,(1 - p^{-4k})^{-1} \\ &= \frac{\zeta(4\,k)\,\zeta(6\,k)}{\zeta(12\,k)}\,.\end{aligned}$$

E. Trost, Zürich

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD) und L. Carlitz (Durham, N.C., USA).

Aufgabe 660. *Voraussetzung:* $\boldsymbol{X}(t)$ sei eine geschlossene C^4-Kurve im dreidimensionalen euklidischen Raum, die von jeder Ebene durch $\boldsymbol{O}$ in höchstens zwei Punkten geschnitten wird. Der Parameter t sei so gewählt, dass $\det(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'') = 1$. Dann ist die Kurve $\boldsymbol{X}$ (das heisst das Tripel ihrer Koordinatenfunktionen) Lösung der Differentialgleichung

$$x''' + p x' + q x = 0$$

(alle Kurven, die Lösungen sind, sind untereinander affin mit einer linearen (= homogenen) Transformation mit Determinante ± 1).

Behauptung: Entweder ist $q = p'$, oder $F(t) = q - p'$ wechselt wenigstens viermal das Vorzeichen auf der Kurve. H. Guggenheimer, Brooklyn, N.Y., USA

Lösung des Aufgabenstellers: Annahme, der Satz sei falsch. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:
(a) $F(t)$ wechselt das Vorzeichen nicht. Da

$$\oint F(t)\,\boldsymbol{X}(t)\,dt = \oint (q - p')\,\boldsymbol{X}(t)\,dt = -\oint \boldsymbol{X}'''\,dt - \oint (p'\boldsymbol{X} + p\boldsymbol{X}')\,dt$$
$$= -\oint d\boldsymbol{X}'' - \oint d(p\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{O}\,,$$

so ist entweder $\boldsymbol{O}$ in der konvexen Hülle der Kurve $\boldsymbol{X}(t)$ (bei $F \geq 0$) oder in der konvexen Hülle der kongruenten Kurve $\boldsymbol{Y}(t) := -\boldsymbol{X}(t)$ (bei $F \leq 0$). Das heisst, dass (z.B. im ersten Fall) $\boldsymbol{O}$ auf der Verbindungsgeraden zweier Kurvenpunkte $\boldsymbol{X}(t_1)$, $\boldsymbol{X}(t_2)$ liegen muss ($F \not\equiv 0$). Dann hat die Ebene durch $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{X}(t_1)$, $\boldsymbol{X}(t_3)$ ($t_3 \neq t_1$, $t_3 \neq t_2$) drei Punkte mit der Kurve gemeinsam, im Widerspruch zur Voraussetzung.

(b) $F(t)$ wechselt zweimal das Vorzeichen, etwa in den Punkten $\boldsymbol{X}(t_1)$ und $\boldsymbol{X}(t_2)$. Die Normale zur Ebene $\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{X}(t_1)$, $\boldsymbol{X}(t_2)$ sei $\boldsymbol{N}$; nach (a) sind die drei Punkte affin unabhängig. Wir können annehmen, dass $\boldsymbol{N}$ in denjenigen Halbraum deutet, in dem $F(t) \geq 0$ gilt. Dann ist

$$\oint F(t)\,\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}(t)\,dt = \boldsymbol{N}\cdot\oint F(t)\,\boldsymbol{X}(t)\,dt = 0\,,$$

nach (a). Andererseits ist für $0 \leq t_1 < t_2 < L$

$$\oint F(t)\,\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} F(t)\,\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}(t)\,dt + \int_{t_2}^{L+t_1} F(t)\,\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{X}(t)\,dt > 0\,,$$

im Widerspruch zum vorigen.

Aufgabe 661. For a triangle with circumradius R, semiperimeter s, sides a, b, c, contact segments s_a, s_b, s_c, exradii r_a, r_b, r_c and altitudes h_a, h_b, h_c, prove the inequalities

$$\frac{r_a}{a} + \frac{r_b}{b} + \frac{r_c}{c} \geq \frac{s}{R}\,, \tag{1}$$

$$\frac{h_a}{s_a} + \frac{h_b}{s_b} + \frac{h_c}{s_c} \geq \frac{2s}{R} \tag{2}$$

with equalities if and only if the triangle is equilateral.

Z.M. Mitrović, Vranje, Yugoslavia

Lösung (mit Verschärfung): $r_a/a = s \cdot tg(\alpha/2)/(2R\sin\alpha) = s\,(1 + tg^2\,\alpha/2)/4R = (s^2 + r_a^2)/4Rs$, und Summation liefert wegen $\sum r_i^2 = (\sum r_i)^2 - 2\sum_{j<k} r_j\,r_k = (4R + r)^2 - 2s^2$ die Beziehung

$$\sum r_i/a_i = (s^2 + (4R + r)^2)/4Rs\,.$$

Wegen $s^2 \geq 16Rr - 5r^2$ (vgl. etwa Bottema-Djordjević-Janić-Mitrinović-Vasić, Geometric Inequalities, p. 51, (5.9)) folgt daraus weiter

$$\sum r_i/a_i \geq (4R^2 + 6Rr - r^2)/Rs \geq s/R\,, \tag{*}$$

wobei die zweite Ungleichung sich aus $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \geq s^2$ und $R \geq 2r$ ergibt. Damit ist die Behauptung (1) durch (*) verschärft, und (2) erhält man aus (1) mittels $h_a/s_a = 2r_a/a$.

F. Leuenberger, Feldmeilen, ZH

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), L. Bankoff (Los Angeles, Calif., USA), C. Bindschedler (Küsnacht, ZH), P. Bundschuh (Freiburg i.Br., BRD), L. Carlitz (Durham, N.C., USA), H. Frischknecht (Berneck, SG), A. Makowski (Warszawa, Polen), P. Nüesch (Lausanne), I. Paasche (München, BRD), O. Reutter (Ochsenhausen, BRD), K. Zacharias (Berlin, DDR).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Juni 1973,** wenn möglich in Maschinenschrift. Dagegen ist die Einsendung von Lösungen zu den mit **Problem ... A, B** bezeichneten Aufgaben an keinen Termin gebunden.

Aufgabe 681. Z bezeichne die Menge der ganzen rationalen Zahlen. Eine quadratische Form

$$ax^2 - by^2 \quad (a, b \in Z\,;\; ab \neq 0) \tag{*}$$

heisse linear-invariant, falls es eine lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\left[r, s, u, v \in Z\,;\; \begin{pmatrix} r & s \\ u & v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

so gibt, dass für alle $x, y \in Z$ gilt: $ax'^2 - by'^2 = ax^2 - by^2$. Man bestimme alle linear-invarianten quadratischen Formen (*).

P. Wilker, Bern

Aufgabe 682. Let $a(1) = 1$, $a(2) = -1$. Take their negative and construct the sequence $a(1) = 1$, $a(2) = -1$, $a(3) = -1$, $a(4) = +1$. Again take the negative of this and construct the sequence,

$$a(1) = 1\,,\quad a(2) = -1\,,\quad a(3) = -1\,,\quad a(4) = +1\,,\quad a(5) = -1\,,\quad a(6) = +1\,,$$

$$a(7) = +1,\quad a(8) = -1$$

and continue the process. Determine when $a(m) = +1$ and when it is -1.

J. M. Gandhi, Macomb, Illinois, USA

Aufgabe 683. Man ermittle alle Kegelschnittkurven, die eine gegebene Ellipse in vier reellen Schnittpunkten unter rechten Winkeln schneiden.

C. Bindschedler, Küsnacht, ZH

Aufgabe 684. Es seien m, n natürliche Zahlen. Einen geschlossenen Polygonzug im (m, n)-Geflecht (für $m = 2$, $n = 4$ vgl. Figur 1) nennen wir eine *Runde*, falls seine einzigen Richtungsänderungen auf der dem Geflecht umschriebenen Rechteckslinie stattfinden (vgl. Figur 2). Zwei Runden, die aus denselben Strecken bestehen, sollen als gleich gelten. Man bestimme die Anzahl $r(m, n)$ aller Runden im (m, n)-Geflecht.

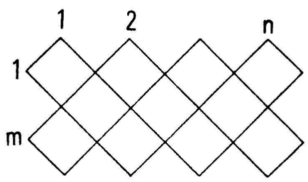

Fig. 1

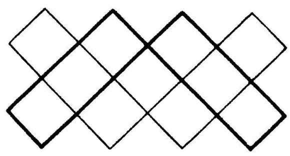
Fig. 2

M. Rätz (Amsterdam) und J. Rätz (Bern)

Literaturüberschau

Einführung in die Zahlentheorie. Von Rudolf Mönkemeyer. 138 Seiten. DM 12.80. Verlag Schroedel/Schöningh, Hannover-Paderborn, 1971.

Die elementare Zahlentheorie birgt in didaktischer Hinsicht ein vielfältiges Potential, das von der modernen Schulmathematik bis heute nur wenig genutzt worden ist. Viele zahlentheoretische Fragestellungen eignen sich vorzüglich zur Pflege des heuristischen Denkens. Andererseits kann dieser Bereich aber auch zur Motivation der einfachsten algebraischen Strukturen wie Gruppe, Ring und Körper herangezogen werden. Diese Möglichkeiten sind kaum übersehen worden. Dass sie nur in beschränktem Masse Eingang in die Schulmathematik gefunden haben mag vielleicht daran liegen, dass im deutschsprachigen Raum nur wenig Literatur zur elementare Zahlentheorie vorhanden ist. Es ist daher sehr zu begrüssen, dass nun das Buch von Mönkemeyer in einer Neubearbeitung wieder vorliegt. Es wurde um einige Kapitel erweitert und gleichzeitig aus dem bisherigen Rahmen von Ergänzungsschriften zu einem Unterrichtswerk herausgelöst.