senkrecht zu den Schenkeln im Gegenwinkelfeld ausgehenden und einander in D von innen berührenden Bogen, dann haben wir (in anderer Bezeichnung) Figur 1a vor uns. Werden auch die Gegenbögen $\widehat{a}''$ und $\widehat{b}''$ zu $\widehat{a}'$ und b' hinzugefügt, dann ist nunmehr $\widehat{a}''$ der umschliessende und $\widehat{b}''$ der umschlossene Bogen hinsichtlich der beiden aneinandergefügten Bögen $\widehat{AD}$ und $\widehat{DB}$. Entsprechend liessen sich auch hinsichtlich CD einschliessende und umschliessende Kreise ermitteln. Alles bisherige kann ausserdem auch auf sich von aussen berührende Bögen angewendet werden.

Das Bisherige kann sinngemäss auch auf Bogenvierecke auf der Kugel übertragen werden. Um dies einzusehen, übertragen wir etwa Figur 2 ohne die Mittelpunktvierecke stereographisch in der üblichen Weise von der Äquatorebene auf die Kugeloberfläche. Diese Übertragung ist winkeltreu, zerstört jedoch jene Beziehungen, die in der Ebene mit Umfangswinkeln und dergleichen zu tun haben. Deshalb können wir nicht mehr vom Mittelpunktviereck ausgehen, müssen uns vielmehr ausschliesslich auf den Kreis U stützen. Die entsprechenden Bogenvierecke auf der Kugel liegen nun natürlich nicht mehr in *einer* Ebene, vielmehr in *vier* Ebenen, die als Seitenflächen eines Vierflachs angesehen werden können.

Mit diesen Andeutungen über Kreisbogenvierecke, die noch um zahlreiche weitere Bemerkungen vermehrt werden könnten, mag es sein Bewenden haben.

J. E. Hofmann, Ichenhausen

Eine Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung und einige andere Abschätzungen für ebene konvexe Bereiche

1. Es seien $p(\vartheta)$ bzw. $b(\vartheta)$ Stützfunktionen und Breite eines ebenen beschränkten konvexen Bereiches B mit inneren Punkten. $p(\vartheta)$ ist also der Abstand der Stützgeraden mit dem Neigungswinkel ϑ von einem Punkt P, den wir als inneren Punkt von B annehmen. $b(\vartheta)$ ist der Abstand zwischen den Stützgeraden mit den Neigungswinkeln ϑ und $\vartheta + \pi$. A bzw. A_P sei der Flächeninhalt von B bzw. der Pedalkurve bez. P. (Diese hat in Polarkoordinaten mit Pol P die Darstellung $r = p(\vartheta)$.) Wir beweisen u. a. für

$$J(\varphi) = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} b(\vartheta)\, b\,(\vartheta + \varphi)\, d\vartheta\,, \qquad |\varphi| \leqslant \pi\,,$$

die Ungleichungen

$$A \leqslant J(\varphi) \leqslant A_P\,.$$

Die linke dieser Ungleichungen kann man für $\varphi = \pi/2$ folgendermassen interpretieren: Der Mittelwert der Inhalte aller B umschriebenen Rechtecke ist grösser als der entsprechende Mittelwert bei einem flächengleichen Kreis, es sei denn, B ist ein Kreis. Mit Hilfe einer ähnlichen Ungleichung ergibt sich eine Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung. Dabei können wir voraussetzen, dass $p(\varphi)$, $b(\varphi)$ zweimal stetig differenzierbar sind, da man andernfalls B durch konvexe Bereiche mit zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $p(\vartheta)$, $b(\vartheta)$ approximieren kann, wobei auch die Integrale konvergieren.

2. Wir setzen

$$I_P(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\vartheta)\, p\,(\vartheta + \varphi)\, d\vartheta\,, \qquad |\varphi| \leqslant \pi\,.$$

Dann ergibt sich aus $b(\vartheta) = p(\vartheta) + p\,(\vartheta + \pi)$ und der Periodizität von $p(\vartheta)$

$$J(\varphi) = \frac{1}{2}\,(I_P(\varphi) + I_P\,(\varphi + \pi))\,. \tag{1}$$

Entwickelt man $p(\vartheta)$ in eine Fourier-Reihe

$$p(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{ik\vartheta}, \qquad \bar{a}_k = a_{-k}\,,$$

so erhält man

$$A = \pi\,|\,a_0|^2 + 2\pi \sum_{k=2}^{\infty} |a_k|^2\,(1 - k^2)\,, \tag{2}$$

$$I_P(\varphi) = \pi\,|a_0|^2 + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \cos k\,\varphi\,. \tag{3}$$

Beide Formeln werden von Chernoff [1] bewiesen. Sie finden sich in ähnlicher Form bei Hurwitz [2], S. 373, 385. Setzt man (3) in (1) ein, so fällt a_1 heraus. Das lässt sich folgendermassen verstehen: Bei Änderung des Bezugpunktes P ändert sich nur a_1. $J(\varphi)$ ist aber von der Lage von P unabhängig (wie auch A). Ist $a_1 = 0$, so ist P der Steiner-Punkt von B (vgl. z.B. Su [3]). Für stetig gekrümmten Rand ∂B ist der Steiner-Punkt der Schwerpunkt, falls man ∂B proportional zur Krümmung mit Masse belegt.

Aus (3) entnimmt man folgendes: Für $|\varphi| < \pi/2$ ist $I_P(\varphi)$ minimal, wenn P der Steiner-Punkt ist; für $|\varphi| = \pi/2$ ist $I_P(\varphi)$ unabhängig von P; für $\pi/2 < |\varphi| \leqslant \pi$ ist $I_P(\varphi)$ maximal, wenn P der Steiner-Punkt ist. Hierdurch wird eine Aussage von Su [3], S. 198 berichtigt. Für $\varphi = 0$ ergibt sich, wie auch Su bemerkt, ein Satz von Steiner: Die Pedalkurve hat genau dann minimalen Inhalt, falls P der Steiner-Punkt ist. Denn es ist

$$I_P(0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p^2(\vartheta)\, d\vartheta = A_P\,. \tag{4}$$

Aus (1), (2) und (3) ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten

Satz 1: Es gilt

$$A \leqslant J(\varphi)\,, \tag{5}$$

und Gleichheit tritt genau für die Kreise ein.

Für $\varphi = \pi/2$ findet sich diese Aussage bei Radziszewski [4] (nach einer Vermutung von Biernacki) und bei Chernoff [1]. Radziszewski benutzt eine andere Beweismethode, die ohne Änderung sogar (5) ergibt. Wie auch Radziszewski bemerkt, ergibt sich sofort die

Bieberbachsche Ungleichung: Ist $D = \max\limits_{\vartheta} b(\vartheta)$ der Durchmesser von B, so gilt

$$A \leqslant \frac{\pi}{4} D^2\,,$$

und Gleichheit tritt genau für die Kreise ein.

Aus (2) und (3) ergibt sich ebenso

Lemma 1: Es gilt

$$A \leqslant I_P(\varphi)\,, \tag{6}$$

falls $|\varphi| \leqslant \pi/2$ oder falls $\pi/2 < |\varphi| \leqslant \pi$ und P Steiner-Punkt ist. Gleichheit gilt bei $|\varphi| < \pi/2$ genau für die Kreise um P, bei $|\varphi| = \pi/2$ genau für die Kreise, und unter der Voraussetzung, dass P Steiner-Punkt ist, bei $\pi/2 < |\varphi| \leqslant \pi$ genau für die Kreise um P.

3. Der Inhalt A_P der Pedalkurve ist eine obere Schranke für $I_P(\varphi)$ und $J(\varphi)$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung oder aus

$$(p(\vartheta) - p\,(\vartheta + \varphi))^2 \geqslant 0$$

ergibt sich nämlich mit (4)

$$I_P(\varphi) \leqslant I_P(0) = A_P \tag{7}$$

und entsprechend

$$J(\varphi) \leqslant J(0)\,.$$

Mit (1) und (7) wird

$$J(0) = \frac{1}{2}\,(I_P(0) + I_P(\pi)) \leqslant A_P\,, \tag{8}$$

also wird

$$J(\varphi) \leqslant A_P\,. \tag{9}$$

Gleichheit tritt in (7) genau dann ein, wenn $p(\vartheta)$ die Periode φ hat, in (8), falls B das Symmetriezentrum P hat, und in (9), falls beides der Fall ist. (8) gestattet übrigens eine bekannte Deutung: Symmetriesierung, d. h. Übergang von $p(\vartheta)$ zu $(p(\vartheta) + p\,(\vartheta + \pi))/2$

vermindert den Inhalt der Pedalkurve, während der Inhalt von B nach der Minkowskischen Ungleichung (s. Nr. 5) vergrössert wird.

4. Wir leiten nun eine Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung her. Es sei P der Steiner-Punkt von B. Dann ist nach (1), (4) und Lemma 1 für $\varphi = \pi$

$$J(0) = \frac{1}{2}\,(I_P(0) + I_P(\pi)) \geqslant \frac{1}{2}\,(A_P + A)\,, \tag{10}$$

und Gleichheit tritt nur für Kreise um P auf. Daraus ergibt sich sofort die

Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung: Ist P Steiner-Punkt von B, so gilt

$$\frac{A_P + A}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}\,D^2\,.$$

Gleichheit tritt genau für die Kreise um P ein. (D Durchmesser, A Inhalt, A_P Inhalt der Pedalkurve bez. P.)

Dass man links nicht etwa A_P schreiben kann, zeigen die Orbiformen. Für sie gilt, falls P Steiner-Punkt ist, nach (9) und (10)

$$\frac{A_P + A}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}\,b^2 \leqslant A_P$$

und es ist $b = D$. Gleichheit tritt rechts aber nur für zentralsymmetrische Orbiformen, also Kreise ein.

5. Es erhebt sich die Frage, ob sich die bewiesenen Ungleichungen aus bekannten Ungleichungen ergeben. Für Orbiformen fällt (5) und die Bieberbachsche Ungleichung mit der isoperimetrischen Ungleichung zusammen. Denn ihr Umfang ist $L = \pi\, b$ und man erhält

$$A \leqslant \frac{\pi}{4}\,b^2 = \frac{L^2}{4\,\pi}\,.$$

Im allgemeinen kann man aber (5) und die isoperimetrische Ungleichung nicht in Beziehung zueinander setzen. Für Rechtecke mit den Seiten $2\,a_1$, $2\,a_2$ berechnet man

$$J(\varphi) = a_1^2 + a_2^2 + a_1\,a_2\,\pi\,, \qquad \frac{L^2}{4\,\pi} = \frac{4}{\pi}\,(a_1^2 + a_2^2) + \frac{8}{\pi}\,a_1\,a_2\,.$$

Für Quadrate ist der zweite Ausdruck kleiner als der erste, die isoperimetrische Ungleichung also schärfer als (5), für $a_2 = 2\,a_1$ ist es umgekehrt.

Die Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung und damit auch (6) können ebenfalls schärfer sein als die isoperimetrische Ungleichung, wie die Orbiformen zeigen.

Für zwei Kurven mit den Stützfunktionen $p_1(\vartheta)$ und $p_2(\vartheta)$ und den Inhalten A_1 und A_2 heisst

$$A_{12} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} (p_1(\vartheta)\,p_2(\vartheta) - p_1'(\vartheta)\,p_2'(\vartheta))\,d\vartheta$$

gemischter Inhalt und es gilt die Minkowskische Ungleichung (s. z. B. [5])

$$A_1 A_2 \leqslant A_{12}^2 .$$

Für $p(\vartheta)$ und $p\ (\vartheta + \varphi)$ gibt diese

$$A \leqslant \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (p(\vartheta)\, p\ (\vartheta + \varphi) - p'(\vartheta)\, p'\ (\vartheta + \varphi)\ d\vartheta .$$

Da hierin Gleichheit auftritt, wenn φ eine Periode von $p(\vartheta)$ ist, könnte man vermuten, dass diese Ungleichung stets besser als (5) ist. Das ist jedoch nicht der Fall. Ist nämlich B eine Ellipse mit Zentrum P, dann ist

$$\int_0^{2\pi} p'(\vartheta)\, p'\ (\vartheta + \pi/2)\ d\vartheta < 0 .$$

Das ergibt sich ohne Rechnung aus der Deutung von $p'(\vartheta)$ als orientiertem Abstand zwischen dem Punkt auf ∂B mit dem Tangentenwinkel ϑ und dem Fusspunkt des Lotes von P auf diese Tangente.

6. Herrn R. Schneider verdanke ich neben anderen Bemerkungen und dem Hinweis auf die Arbeit [4] die folgenden Hinweise. Der Mittelwert der Umfänge aller B umschriebenen Rechtecke ist gleich dem entsprechenden Mittelwert bei einem flächengleichen Kreis, während er, wie eingangs bemerkt, für die Inhalte grösser ist. Diese Aussage ist auch für umschriebene gleichwinklige Polygone richtig. Dadurch wird es nahegelegt, auch die Mittelwerte der Inhalte umschriebener gleichwinkliger Polygone zu untersuchen. Auch die Ausdehnung dieser Untersuchungen auf den Raum bietet sich an.

E. Heil, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] P. R. Chernoff, *An Area-width Inequality for Convex Curves.* Amer. Math. Monthly *76*, 34–35 (1969).

[2] A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques.* Ann. de l'Ecole Normale Supérieure, [3], *19*, 357–408 (1902).

[3] B. Su, *On Steiner's Curvature-centroid.* Jap. J. Math. *4*, 195–201 (1927).

[4] K. Radziszewski, *Sur une fonctionelle défine sur les ovales.* Ann. Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. Lublin. [A] *10*, 57–59 (1956).

[5] W. Blaschke, *Vorlesungen über Integralgeometrie I.* Hamburger Math. Einzelschr. *20*, Leipzig 1935, Auch Chelsea, New York 1949; Deutscher Verl. d. Wiss., Berlin 1955.