# Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 3

PDF erstellt am: **24.09.2024**

# Ungelöste Probleme

**Nr. 55.** Vermutlich gilt die folgende Aussage: Hat ein Polytop, also ein kompaktes konvexes Polyeder $P$, des $n$-dimensionalen euklidischen Raumes die Eigenschaft, dass sich zu jeder seiner Seitenflächen noch wenigstens eine andere mit ihr disjunkte Seitenfläche aufweisen lässt, so gilt für die Anzahl $f$ der Seitenflächen von $P$ die Ungleichung $f \geqslant 2n$. Offensichtlich gilt Gleichheit beim Hyperwürfel, also beim $2n$-Zell. Demnach ist also $2n$ die kleinste mögliche Seitenflächenzahl für Polytope der oben genannten Eigenschaft. – Für $n = 1$ und $n = 2$ ist unsere Aussage trivialerweise richtig. Im Falle $n = 3$ kann man die Polytope mit $f < 6$ leicht ausmustern. Es gibt lediglich drei nicht isomorphe Typen, die durch das Tetraeder ($f = 4$), die Pyramide mit quadratischer Grundfläche ($f = 5$) und durch das gerade Prisma mit dreieckiger Grundfläche ($f = 5$) repräsentiert werden. Die aufgezählten Polytope haben die verlangte Eigenschaft ersichtlich nicht, so dass die Aussage auch hier zutrifft.

Seltsamerweise scheint es, dass die Abklärung, ob unsere Vermutung für alle Dimensionen $n$ richtig ist oder nicht, viel schwieriger ist, als ein Konvexgeometer bei erster Konfrontation mit der Frage anzunehmen geneigt ist. Bereits einige haben sich vergeblich bemüht. B. Grünbaum (Seattle) lässt uns wissen (Brief vom 17.10.71), dass die Aussage für $n = 4$ sicher noch stimmt. Dies ergibt die Kontrolle der Isomorphietypen mit $f < 8$ im vierdimensionalen Raum. Gilt dies für alle Dimensionen $n$?

H. Hadwiger

# Kleine Mitteilungen

## Eine Kennzeichnung der sphärischen Trochoidenbewegung

1. Bekanntlich besitzt der *Wendekreis* in der ebenen euklidischen Kinematik mehrere ihn kennzeichnende Eigenschaften, die in der sphärischen Kinematik auf verschiedene geometrische Orte führen[1]. Wir wollen uns hier mit dem erstmals von Schoenflies betrachteten *sphärischen Kegelschnitt* beschäftigen, welcher in der quadratischen Verwandtschaft zwischen gegebenem Punkt und zugehörigem Krümmungsmittelpunkt eine analoge Rolle spielt wie der Wendekreis in der ebenen Kinematik (vgl. [4], S. 56f.). Dieser (sphärische) *$\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitt* $\mathfrak{W}_s$[2] ist definitionsgemäss der Ort der Punkte $X$, deren Krümmungsmittelpunkte auf demjenigen Grosskreis liegen, dessen Ebene zur Geraden $OP$ normal ist. $O$ bezeichnet dabei den Kugelmittelpunkt und $P$ den augenblicklichen *Drehpol*. Den Radius der Kugel nehmen wir wie üblich mit Eins an.

---

[1] Vgl. [4], S. 59, [5], S. 57 und [8], S. 348.

[2] Das «$\mathfrak{S}$» soll an Schoenflies erinnern. In der Getriebetechnik ist statt $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitt die Bezeichnung *Äquatorialkegelschnitt* üblich.

2. Setzt man analog [1] für die *infinitesimale Abbildungsmatrix* $\mathfrak{B}$ eines einparametrigen Drehvorganges

$$\mathfrak{B} := \begin{bmatrix} 0 & q^3 & -q^2 \\ -q^3 & 0 & q^1 \\ q^2 & -q^1 & 0 \end{bmatrix},$$

so gilt für den Drehpol $P$

$$\overrightarrow{OP} = \mathfrak{p} = q\,\mathfrak{q}\,, \quad \mathfrak{q} := q^i\,\mathfrak{e}_i\,, \quad q := (\mathfrak{q}, \mathfrak{q})^{-1/2}\,, \tag{1}$$

wobei $\{O;\ \mathfrak{e}_i\}$ das *Gangsystem* des Drehvorganges repräsentiert. Die Vektorkomponenten von $\overrightarrow{OX}$ bezüglich $\{O;\ \mathfrak{e}_i\}$ fassen wir zum Spaltenvektor $\boldsymbol{x}$ zusammen. Mit (1) ergibt sich damit als Gleichung des $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnittes[3])

$$(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})\,\{(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) - q[\dot{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}]\} = 1\,, \quad \boldsymbol{x}^2 = 1\,. \tag{2}$$

Für den Krümmungsvektor von $\mathfrak{W}_s$ im Drehpol $P$ berechnet man hieraus

$$-\dot{\boldsymbol{p}}^2\,\boldsymbol{p} + \frac{2}{q}\,\boldsymbol{p} \wedge \dot{\boldsymbol{p}}\,,$$

d.h. *der $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitt oskuliert den sphärischen Wendepunktort*[4]) *im Drehpol und seinem Gegenpunkt.*

Nach [6] versteht man unter *$\mathfrak{S}^{(m)}$-Drehvorgängen* solche, bei denen die geodätische Krümmung der Rast- bzw. Gangpolbahn beim sphärischen Bewegungsablauf das konstante Verhältnis $m \neq 1$ haben. Somit lassen sich auf Grund des obigen Sachverhaltes alle Ergebnisse aus [6], die sich auf die Schmiegebene des sphärischen Wendepunktortes in $P$ beziehen, unmittelbar so formulieren, dass sie sich auf die Schmiegebene des $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnittes $\mathfrak{W}_s$ in $P$ beziehen. So folgt z.B. wegen [6] (Satz 7) der

**Satz 1.** *Bei $\mathfrak{S}^{(m)}$-Drehvorgängen hat das Verhältnis der geodätischen Krümmung in $P$ der Gangpolbahn bzw. des $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnittes den konstanten Wert* $1/2\,(1 - m)$.

Die die Bahntangenten der Punkte des $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnittes berührenden Grosskreise gehen sämtlich durch den Punkt

$$\boldsymbol{w}_s = \mu\,(\boldsymbol{p} + q \cdot \boldsymbol{p} \wedge \dot{\boldsymbol{p}})\,, \quad \mu := (1 + q^2\,\dot{\boldsymbol{p}}^2)^{-1/2} \tag{3}$$

und seinen Gegenpunkt. Wir nennen den auf $\mathfrak{W}_s$ gelegenen Punkt $W_s$ den *$\mathfrak{S}$-Wendepol*[5]).

---

[3]) Vgl. hierzu auch [7], 2. Abschnitt.

[4]) Für den sphärischen *Wendepunktort* siehe [2], S. 17f.

[5]) In der Bündelgeometrie wurde die Gerade $OW_s$ erstmals von Schoenflies betrachtet. Der $\mathfrak{S}$-Wendepol liegt somit wie die *Wendepole* nach H. R. Müller ([3], S. 34) auf der sphärischen Polbahnnormalen.

3. Als nächstes fragen wir nach der Einhüllenden der Schar der $\mathfrak{S}$-Wendekegelschnitte auf der Gangkugel beim zugrundeliegenden Drehvorgang. Differentiation von (2) liefert ($\dot{x} = 0$)

$$2(p, x)(\dot{p}, x) + [p, \dot{p}, x](q(\dot{p}, x) + \dot{q}(p, x)) + q(p, x)[p, \ddot{p}, x] = 0 . \tag{4}$$

Die vom Drehpol und seinem Gegenpunkt verschiedenen Schnittpunkte von $\mathfrak{W}_s$ mit seiner Einhüllenden wollen wir analog zur ebenen Kinematik die sphärischen *$\mathfrak{S}$-Ballschen Punkte* nennen.

Mit dem Ansatz

$$\ddot{p} = \sigma \cdot \dot{p} - \dot{p}^2 \cdot p + \frac{1+\varrho}{q} p \wedge \dot{p} \tag{5}$$

und (3) ergibt sich der

**Satz 2.** *Die Drehvorgänge mit $\sigma + (\dot{q}/q) = 0$ sind unter den allgemeinen dadurch gekennzeichnet, dass der $\mathfrak{S}$-Wendepol stets ein $\mathfrak{S}$-Ballscher Punkt ist.*

Mit dem in [6] bewiesenen Lemma folgt daraus das

**Korollar.** *Unter den $\mathfrak{S}^{(m)}$-Drehvorgängen sind die sphärischen Trochoidenbewegungen dadurch gekennzeichnet, dass der $\mathfrak{S}$-Wendepol stets ein $\mathfrak{S}$-Ballscher Punkt ist.*

Differentiation von (3) liefert mit (5)

$$\dot{w}_s = \mu\, q \left(\sigma + \frac{\dot{q}}{q}\right) \{p \wedge \dot{p} - \mu\, q \cdot \dot{p}^2\, w_s\} - \mu\, \varrho\, \dot{p}$$

und somit den[6])

**Satz 3.** *Unter den einparametrigen Drehvorgängen sind die sphärischen Zykloidenbewegungen dadurch gekennzeichnet, dass der $\mathfrak{S}$-Wendepol eine Bahnkurve beschreibt.*

Für Drehvorgänge mit $\sigma + (\dot{q}/q) = 0$ zerfällt (4) in zwei Grosskreise, nämlich in die sphärische Polbahnnormale und

$$(1 - \varrho)(x, p) + q[x, p, \dot{p}] = 0 , \quad x^2 = 1 . \tag{6}$$

Nennen wir analog zur ebenen euklidischen Kinematik eine sphärische Trochoidenbewegung mit $m = 1/2$ (vgl. [6]) eine *sphärische Ellipsenbewegung*, so folgt der

**Satz 4.** *Der Drehpol ist genau dann stets Doppelpunkt von* (4), *wenn eine sphärische Ellipsenbewegung vorliegt.*

J. Tölke, Universität Stuttgart

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. R. Müller, *Kinematik* (Berlin 1963).
[2] H. R. Müller, *Sphärische Kinematik* (Berlin 1962).
[3] H. R. Müller, *Die Bewegungsgeometrie auf der Kugel*, Mh. Math. *55*, 28–42 (1950).
[4] A. Schoenflies, *Geometrie der Bewegung* (Leipzig 1886).
[5] P. Serret, *Theorie nouvelle geometrique ...*, (Mallet-Bachelier, Paris 1860).
[6] J. Tölke, *Spezielle Bewegungsvorgänge*, Teil III, Archiv Math. *21*, 650–659 (1970).
[7] J. Tölke, *Zur zentralaffinen räumlichen Kinematik*, Math. Z. *116*, 71–78 (1970).
[8] J. Tölke, *Der sphärische Bresse-Kegelschnitt*, Math. Nachr. *47*, 345–353 (1970).

[6]) Ein analoger Sachverhalt gilt natürlich auch für die *sphärischen Kreisevolventenbewegungen*.

## Die Lösung der Matrizengleichung $X - AXB = C$ durch Integration

Es seien $X$ und $C$ $(n\times m)$-Matrizen, $A$ eine $(n\times n)$- und $B$ eine $(m\times m)$-Matrix. Wir bezeichnen die Eigenwerte von $A$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und die Eigenwerte von $B$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Mit Hilfe des Kroneckerproduktes [2] kann man leicht die folgenden Sätze über die Gleichung

$$X - AXB = C \tag{1}$$

beweisen.

**Satz 1:** Die Gleichung (1) hat genau dann für beliebiges $C$ eine eindeutige Lösung, wenn

$$\lambda_i \mu_j \neq 1 \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m\,. \tag{2}$$

**Satz 2:** Wenn die Eigenwerte von $A$ und $B$ alle dem Betrag nach kleiner als 1 sind, so ist (1) eindeutig lösbar in der Form

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A^n C B^n\,. \tag{3}$$

(3) führt mit Hilfe der $z$-Transformation auf eine Lösung durch Kurvenintegrale. Durch die $z$-Transformation wird einer Folge $\{f_n\}$ eine Funktion $F(z) = [\{f_n\}]$ zugeordnet,

$$[\{f_n\}] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}\,.$$

Dabei wird $|z| > 1/\varrho$ angenommen, wenn $\varrho$ der Konvergenzradius der Potenzreihe ist. Für zwei Folgen $\{f_n\}$ und $\{h_n\}$ und ihre $z$-Transformierten $F(z)$ und $H(z)$ gilt ([1], S. 155)

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n h_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} p^{-1} F(p)\, H(p^{-1})\, dp\,, \tag{4}$$

vorausgesetzt, dass die Reihe auf der linken Seite konvergiert. Der Integrationsweg $\Gamma$ schliesst alle Pole von $p^{-1} F(p)$ ein. Setzt man $f_n = a^n$ und $h_n = c\, b^n$ und nimmt man $|a| < 1$ und $|b| < 1$ an, so ist für

$$|z| \geq 1 \qquad [\{f_n\}] = \frac{z}{z-a} \qquad \text{und} \qquad [\{h_n\}] = c\,\frac{z}{z-b}\,.$$

Aus (4) folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n c\, b^n = \frac{-1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z-a}\, c\, \frac{1}{z\,b-1}\, dz\,. \tag{5}$$

Es gilt nun für Matrizen.

**Satz 3:** Ist (2) erfüllt, dann gibt es eine positiv orientierte einfachgeschlossene Kurve $\Gamma$, die alle Eigenwerte von $A$ einschliesst und keine der Zahlen $1/\mu_j$ (die Reziproken der von Null verschiedenen Eigenwerte von $B$), und es ist

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (zE - A)^{-1}\, C\, (E - zB)^{-1}\, dz \tag{6}$$

die Lösung der Gleichung (1).

*Beweis:* Wir fügen auf der linken Seite von (1) $\pm zXB$ ein, wobei $z$ ein Punkt von $\Gamma$ ist.

$$X(E - zB) + (zE - A)XB = C .$$

Die Inversen in der folgenden Zeile existieren wegen der Wahl von $\Gamma$.

$$(zE - A)^{-1} X + XB(E - zB)^{-1} = (zE - A)^{-1} C(E - zB)^{-1} . \tag{7}$$

Wir dividieren durch $2\pi i$ und integrieren längs $\Gamma$. Es ist stets ([2], S. 188)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} (zE - A)^{-1} dz = E , \tag{8}$$

wenn $\Lambda$ eine positiv orientierte Kurve ist, in derem Inneren alle Eigenwerte von $A$ liegen. $(z B - E)^{-1}$ ist holomorph im Inneren von $\Gamma$, das Integral des zweiten Summanden in (7) ist Null, der erste Term gibt wegen (8) den Wert $X$. Für den speziellen Fall $B = A^*$ findet man (6) mit einem anderen Beweis auch bei [3].

Wir geben nun noch eine weitere Darstellung der Lösung von (1). Transformiert man in $(n \times n)$-Matrix $A$ mit den verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ auf die Jordan-Form, dann erkennt man, dass sich $A$ eindeutig in der folgenden Form schreiben lässt ([2], S. 175 oder [4]):

$$A = \sum_{i=0}^{k} (\lambda_i E + N_i) P_i , \tag{9}$$

mit

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i , \quad N_i P_j = P_j N_i = \delta_{ij} N_i , \quad \sum_{i=1}^{k} P_i = E , \quad N_i^n = 0 .$$

Man verifiziert leicht

$$(zE - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n} (z - \lambda_i E)^{-j-1} N_i^j P_i . \tag{10}$$

Ist $A$ in der Form (9) gegeben, dann gilt

**Satz 4:** Unter der Voraussetzung (2) hat die Lösung von (1) die Form

$$X = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j-1} N_i^j P_i C (\lambda_i B - E)^{-j-1} .$$

*Beweis:* Man setzt (10) in (6) ein und berechnet das Integral mit dem Residuenkalkül.

Harald Wimmer, TH Graz, und
Allen D. Ziebur, State University of New York at Binghamton

LITERATUR

[1] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method* (Wiley, 1964).

[2] P. Lancaster, *Theory of Matrices* (Academic Press, 1969).

[3] R. A. Smith, *Matrix Calculations for Liapunov Quadratic Forms*, J. Diff. Eq. *2*, 208–217 (1966).

[4] A. D. Ziebur, *On Determining the Structure of A by Analysing $e^{At}$*, SIAM Rev. *12*, 98–102 (1970).

## Eine Bemerkung zu einem Satz über räumliche Fünfecke[1])

### I.

Der heute schon gut bekannte Satz[2]) von B.L. van der Waerden lautet: Ein räumliches Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, in dem alle Seiten gleich $a$ und alle Winkel gleich $\alpha$ sind, ist eben.

Ich möchte hier einen Beweis mit Hilfe der Vektorrechnung geben.

**Beweis.** Bezeichnet man in einem räumlichen Fünfeck $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ den Vektor $\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{A}_{i+1}$ mit $\boldsymbol{a}_i$ ($i = 1, \ldots, 5$ zyklisch) und setzt man voraus, dass $|\boldsymbol{a}_i| = 1$, so gilt

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_{i+1} = c = \cos\omega \,, \tag{1}$$

wobei $\omega$ den Winkel zwischen den Vektoren $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$ bedeutet. Auf Grund der Geschlossenheit erhält man weiter die Bedingung

$$\sum_{j=1}^{5} \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{O} \,. \tag{2}$$

Durch Skalarmultiplikation von (2) mit dem Vektor $\boldsymbol{a}_i$ ergeben sich die Beziehungen

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_{i+3} + \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_{i+2} = -2c - 1$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_{i+3} = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_{i+2} = -c - \frac{1}{2} \,. \tag{3}$$

Bilden wir nun die Gramschen Determinanten $G_4 = G(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4)$ und $G_3 = G(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{a}_{i+2})$, so verschwindet $G_4$. Wegen (1) und (3) erhält man

$$G_4 = \begin{vmatrix} 1 & c & \left(-c-\frac{1}{2}\right) & \left(-c-\frac{1}{2}\right) \\ c & 1 & c & \left(-c-\frac{1}{2}\right) \\ \left(-c-\frac{1}{2}\right) & c & 1 & c \\ \left(-c-\frac{1}{2}\right) & \left(-c-\frac{1}{2}\right) & c & 1 \end{vmatrix} .$$

Die einfache Berechnung liefert dann die Gleichung

$$G_4 = \frac{5}{4} \left(2c^2 + c - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \tag{4}$$

mit den Wurzeln

$$c = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4} \,. \tag{5}$$

---

[1]) Mitteilung im Geometrischen Seminar ČVUT Prag am 1. Juni 1971.

[2]) El. Math. 25, 73–78 (1970). Vgl. dazu auch die Arbeit von J.D. Dunitz und J. Waser: The Planarity of the Equilateral, Isogonal Pentagon, El. Math. *27*, 25–32 (1972).

Weiterhin gilt

$$G_3 = \begin{vmatrix} 1 & c & \left(-c-\frac{1}{2}\right) \\ c & 1 & c \\ \left(-c-\frac{1}{2}\right) & c & 1 \end{vmatrix} = -\left(c+\frac{3}{2}\right)\left(2c^2+c-\frac{1}{2}\right).$$

Wegen (4) ist notwendig auch $G_3 = 0$. Die Vektoren $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{a}_{i+1}$, $\boldsymbol{a}_{i+2}$ sind linear abhängig und folglich liegen je vier Ecken des Fünfecks in einer Ebene. Das betreffende Fünfeck liegt also in der Ebene. Wegen (1) und (5) führt die Wurzel $c = (-1+\sqrt{5})/4$ auf das konvexe reguläre Fünfeck, die zweite Wurzel von (5) gibt das reguläre Sternfünfeck.

## II.

Der Beweis von B.L. van der Waerden hat seine besondere Eleganz. Dies konstatieren schon W. Lüssy und E. Trost, die den Satz in dieser Zeitschrift[3]) auf andere Weise bewiesen haben.

Die folgende Auskunft verdanke ich einer mündlichen Mitteilung von T. Jančar. Der Satz wurde schon im Jahre 1961 in einer sowjetischen Zeitschrift[4]) veröffentlicht. Die Verfasser A.P. Garber, V.I. Garvackij und V. Ja. Jarmolenko beantworten eine Problemaufgabe, die im Jahre 1957 in derselben Zeitschrift[5]) von V.I. Arnold formuliert wurde: Für welches $n$ existiert ein räumliches $n$-Eck, in dem alle Seiten gleich $a$ und alle Winkel gleich $\alpha$ sind?

Die betreffenden Verfasser führen den Beweis ähnlich wie H. Irminger[6]).

S. Šmakal, Prag

[3]) El. Math. *25*, 82–83 (1970).
[4]) Proswjeschtschenie *6*, 345–347 (1961).
[5]) Proswjeschtschenie *2*, 268 (1957).
[6]) El. Math. *25*, 135–136 (1970).

# Nachtrag zu «Ein Satz über räumliche Fünfecke»

(Elemente der Math., Band 25. S. 73)

Der Satz, der in der oben zitierten Arbeit bewiesen wurde, lautet: *Ein räumliches Fünfeck ABCDE, in dem alle Seiten gleich a und alle Winkel gleich $\alpha$ sind, ist eben.*

Als ich die Separata meiner Arbeit verschickt hatte, erhielt ich nach wenigen Tagen Briefe von G. Bol (Freiburg/Br.) und H. S. M. Coxeter (Toronto), die beide einen viel einfacheren Beweis des Satzes enthielten. Der Beweis geht so:

Wenn die Seitenlänge $a$ und der Winkel $\alpha$ gegeben sind, so sind alle Abstände zwischen den 5 Punkten gegeben, also ist die Figur bis auf eine Bewegung oder Umlegung bestimmt. Also gibt es eine Bewegung oder Umlegung $S$, die die Ecken $ABCDE$ zyklisch permutiert. Die fünfte Potenz $S^5$ ist die Identität, also ist $S$ keine Umlegung, sondern eine Bewegung. Der Schwerpunkt der 5 Punkte bleibt bei $S$ fest, also ist $S$ eine Drehung. Also liegen $ABCDE$ in einer Ebene senkrecht zur Drehungsachse.

B.L. van der Waerden, Zürich