

Über Kreisbogenvierecke

Autor(en): **Hofmann, J.E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **27 (1972)**

Heft 1

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-28625>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 27

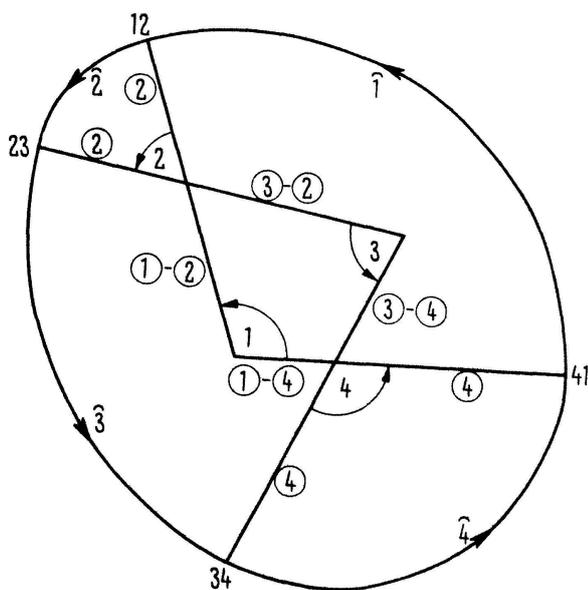
Heft 1

Seiten 1-24

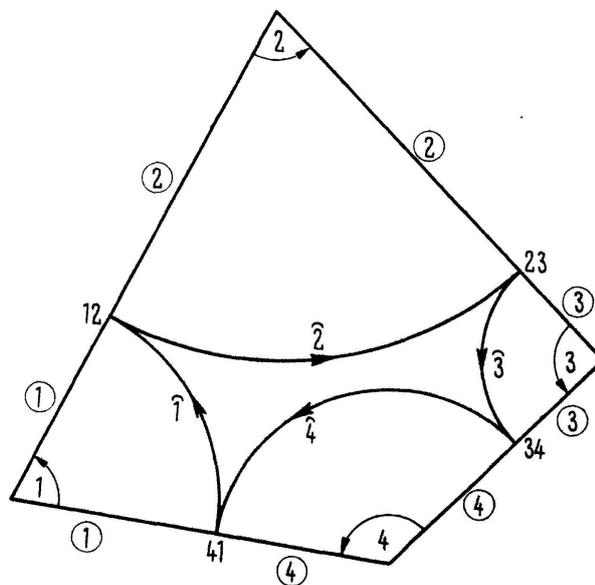
10. Januar 1972

Über Kreisbogenvierecke

Als *Kreisbogenviereck* oder kürzer als *Bogenviereck* soll eine ebene Figur bezeichnet werden, die von vier einander gleichartig berührenden Kreisbögen $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$, $\widehat{4}$ gebildet wird. Die Berührung in den vier aufeinanderfolgenden Treffpunkten 12, 23, 34, 41 soll entweder von innen (erster Art; Figur 1a) oder von aussen (zweiter Art; Fig. 1b) statthaben. Die Mittelpunkte k der Bögen \widehat{k} sollen gleichzeitig als Bezeichnung



Figur 1a
Bogenviereck 1. Art.

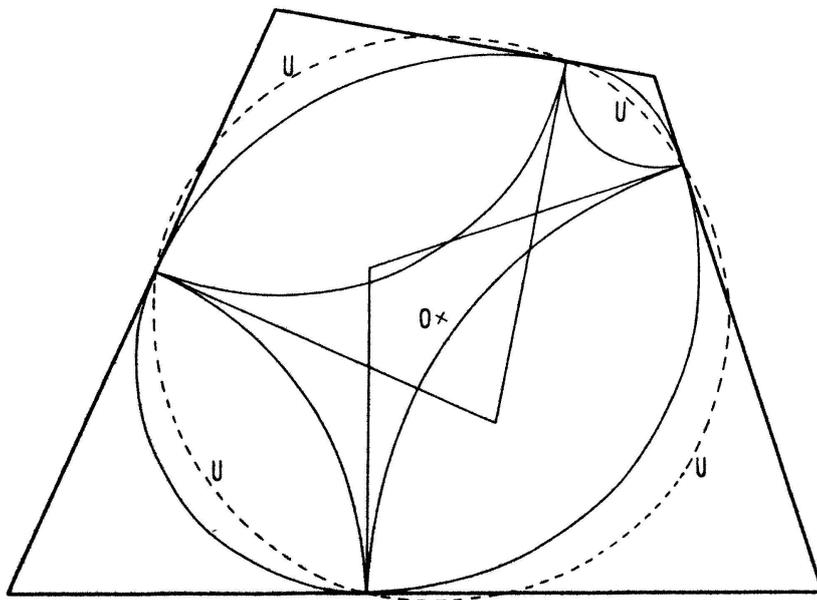


Figur 1b
Bogenviereck 2. Art.

für die ihnen zugehörigen Mittelpunktwinkel dienen. Werden die Radien der Bögen \widehat{k} mit \textcircled{k} bezeichnet, dann ergibt sich aus den beiden Figuren übereinstimmend, dass im Mittelpunktviereck die Summen der Gegenseiten jeweils gleich gross sind, dass also das Mittelpunktviereck ein Tangentenviereck ist. Ist O der Mittelpunkt seines Inkreises, dann zeigt sich, dass er gleich weit von den Treffpunkten absteht, dass also die Treffpunkte Ecken eines Sehnenvierecks sind und dass die Bögen mit dem Um-

kreis U dieses Sehnenvierecks gleiche Winkel bilden. Die Treffpunkte auf U dürfen beliebig gewählt werden; zu ihnen gehören alsdann ∞^1 Bogenvierecke, unterschieden durch die Winkel, die mit U gebildet werden. Nicht alle diese Bogenvierecke sind von der ersten oder zweiten Art. Es gibt nämlich Mischformen; z. B. können Vierecke erster Art auch geradlinige Bestandteile enthalten, jedoch höchstens deren zwei (gegenüberliegende) Seiten. In diesem Sonderfall ist das Sehnenviereck ein gleichschenkliges Trapez. Bei weiterer Veränderung des Treffwinkels können auch Einbuchtungen auftreten, jedoch wiederum höchstens bei zwei (gegenüberliegenden) Seitenbögen. Entsprechendes gilt auch für die Bogenvierecke zweiter Art. Wird also das Sehnenviereck zur Ausgangsfigur gemacht, dann entsteht grosser Formenreichtum, auf dessen selbstverständliche Einzelheiten jedoch nicht näher eingegangen werden soll. Übrigens kann das Mittelpunktviereck als Gelenkviereck aufgefasst werden und darf auch in ein Dreieck entarten.

Gehen wir von einem festen Mittelpunktviereck aus, dann lassen sich ∞^1 Bogenvierecke erster Art angeben. Sie sind «Parallelkurven» und sozusagen die «Evolventen» des Mittelpunktvierecks. Entsprechendes gilt auch für die ∞^1 Bogenvierecke zweiter Art, die dem Viereck zugeordnet werden können. Ist das Mittelpunktviereck Tangenten- und Sehnenviereck, dann haben alle diese Bogenvierecke zweiter Art gleichen Umfang. Dies ist das Ergebnis einer einfachen Rechnung, die ich übergehen kann. Im übrigen ist jedem Bogenviereck erster Art auch ein Bogenviereck zweiter Art eindeutig umkehrbar zugeordnet. Figur 2 zeigt dies an einem Beispiel; jetzt ist das

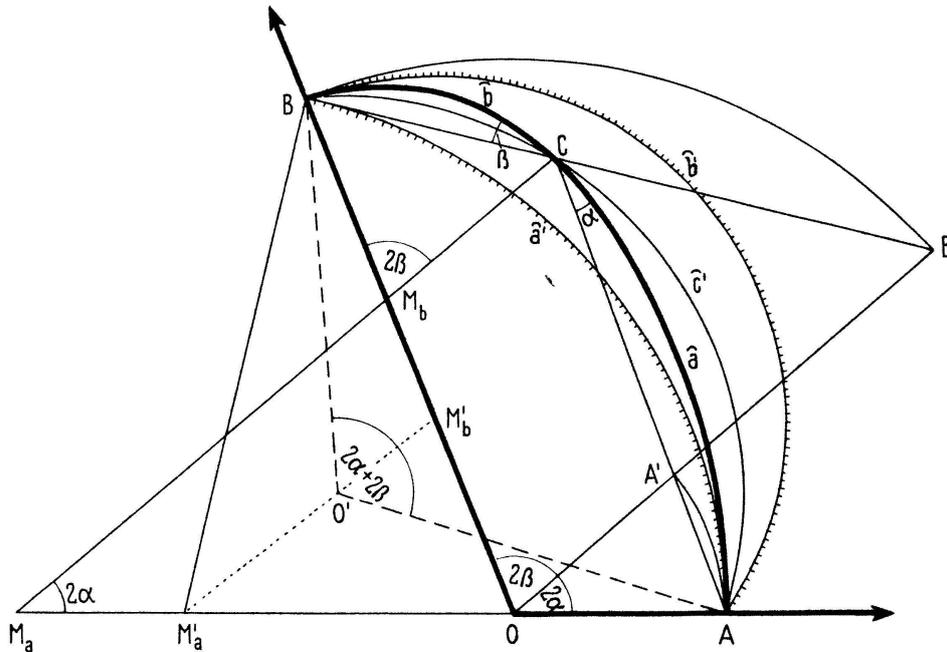


Figur 2

Zugeordnete Bogenvierecke erster und zweiter Art mit Kreis durch die Treffpunkte.

Mittelpunktviereck des Bogenvierecks zweiter Art Tangentenviereck des Bogenvierecks erster Art und umgekehrt; entsprechende Mittelpunktwinkel der Bögen ergänzen sich jeweils zu 180° . Unter den Parallelkurven gibt es auch solche, die in Bogen-dreiecke entarten, nämlich dann, wenn einer der Bögen in einen Punkt entartet. Nunmehr stossen die Bögen in diesem Punkt nicht mehr berührend aufeinander.

Mit dem bisherigen hängt die folgende Aufgabe zusammen: Gegeben sind auf den beiden Schenkeln eines Winkels (Scheitel O) die Punkte A und B . Gesucht ist ein Bogen \widehat{ACB} zwischen A und B , der aus zwei in C einander von innen berührenden Bögen \widehat{a} und \widehat{b} besteht, die in den Endpunkten A und B auf den Winkelschenkeln senkrecht stehen (Figur 3). $OA'B'$ sein ein Strahl durch O , der innerhalb des Winkel-felds AOB liegt und mit OA den Winkel 2α , mit OB den Winkel 2β einschliessen möge. Wir legen die Kreisbögen AA' und BB' um O und schneiden AA' mit BB' in C .



Figur 3
Richtiges Einpassen von zwei berührend aneinanderschliessenden Bögen in ein Winkel-feld.

Die Parallele zu $OA'B'$ durch C treffe die Schenkel des Ausgangswinkels $2\alpha + 2\beta$ bzw. die zugehörigen Verlängerungen in M_a und M_b . Jetzt ist $\triangle AM_aC \sim \triangle AOA'$ und $\triangle BM_bC \sim \triangle BOB'$; folglich stossen die Bögen $\widehat{AC} = \widehat{a}$ um M_a und $\widehat{BC} = \widehat{b}$ um M_b in C zusammen, und zwar senkrecht zu M_aM_bC , berühren also einander von innen. Damit ist die Aufgabe gelöst. Weiterhin schliesst die Sehne AC in C mit \widehat{a} den Winkel α und die Sehne BC in C mit \widehat{b} den Winkel β ein; also ist $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$ unabhängig von der Lage des Punktes C fest. Somit kann C beliebig auf dem Bogen $\widehat{AB} = \widehat{c'}$ um O' angenommen werden, dessen Mittelpunktswinkel $\sphericalangle AO'B = 2(\alpha + \beta)$ ist. Nun fügen wir noch jenen Bogen $\widehat{AB} = \widehat{a'}$ um M'_a hinzu, der in A senkrecht auf dem Schenkel OA auftrifft, ferner jenen Bogen $\widehat{BA} = \widehat{b'}$ um M'_b , der in B senkrecht auf dem Schenkel OB auftrifft. Diese Bögen umschliessen ein Kreisbogenzweieck, innerhalb dessen sich einerseits der Bogen $\widehat{AB} = \widehat{c'}$ um O' , andererseits der gefragte Bogen \widehat{ACB} vorfindet. Im Fall der Figur 3 ist $\widehat{a'} < \widehat{a} + \widehat{b} < \widehat{b'}$. Wandert C auf dem Bogen $\widehat{c'}$ von A nach B , dann wächst $\widehat{a} + \widehat{b}$ von $\widehat{a'}$ bis $\widehat{b'}$.

Nun denken wir uns $\widehat{c'}$ durch seinen Gegenbogen $\widehat{d'}$ zum Vollkreis erweitert und einen weiteren Punkt D auf $\widehat{d'}$ angenommen. Ergänzen wir auch hier die von A und B

senkrecht zu den Schenkeln im Gegenwinkelfeld ausgehenden und einander in D von innen berührenden Bogen, dann haben wir (in anderer Bezeichnung) Figur 1a vor uns. Werden auch die Gegenbögen $\widehat{a''}$ und $\widehat{b''}$ zu $\widehat{a'}$ und $\widehat{b'}$ hinzugefügt, dann ist nunmehr $\widehat{a''}$ der umschliessende und $\widehat{b''}$ der umschlossene Bogen hinsichtlich der beiden aneinandergefügtten Bögen \widehat{AD} und \widehat{DB} . Entsprechend liessen sich auch hinsichtlich CD einschliessende und umschliessende Kreise ermitteln. Alles bisherige kann ausserdem auch auf sich von aussen berührende Bögen angewendet werden.

Das Bisherige kann sinngemäss auch auf Bogenvierecke auf der Kugel übertragen werden. Um dies einzusehen, übertragen wir etwa Figur 2 ohne die Mittelpunktvierecke stereographisch in der üblichen Weise von der Äquatorebene auf die Kugeloberfläche. Diese Übertragung ist winkeltreu, zerstört jedoch jene Beziehungen, die in der Ebene mit Umfangswinkeln und dergleichen zu tun haben. Deshalb können wir nicht mehr vom Mittelpunktviereck ausgehen, müssen uns vielmehr ausschliesslich auf den Kreis U stützen. Die entsprechenden Bogenvierecke auf der Kugel liegen nun natürlich nicht mehr in *einer* Ebene, vielmehr in *vier* Ebenen, die als Seitenflächen eines Vierflachs angesehen werden können.

Mit diesen Andeutungen über Kreisbogenvierecke, die noch um zahlreiche weitere Bemerkungen vermehrt werden könnten, mag es sein Bewenden haben.

J. E. Hofmann, Ichenhausen

Eine Verschärfung der Bieberbachschen Ungleichung und einige andere Abschätzungen für ebene konvexe Bereiche

1. Es seien $p(\vartheta)$ bzw. $b(\vartheta)$ Stützfunktionen und Breite eines ebenen beschränkten konvexen Bereiches B mit inneren Punkten. $p(\vartheta)$ ist also der Abstand der Stützgeraden mit dem Neigungswinkel ϑ von einem Punkt P , den wir als inneren Punkt von B annehmen. $b(\vartheta)$ ist der Abstand zwischen den Stützgeraden mit den Neigungswinkeln ϑ und $\vartheta + \pi$. A bzw. A_P sei der Flächeninhalt von B bzw. der Pedalkurve bez. P . (Diese hat in Polarkoordinaten mit Pol P die Darstellung $r = p(\vartheta)$.) Wir beweisen u. a. für

$$J(\varphi) = \frac{1}{4} \int_0^\pi b(\vartheta) b(\vartheta + \varphi) d\vartheta, \quad |\varphi| \leq \pi,$$

die Ungleichungen

$$A \leq J(\varphi) \leq A_P.$$

Die linke dieser Ungleichungen kann man für $\varphi = \pi/2$ folgendermassen interpretieren: Der Mittelwert der Inhalte aller B umschriebenen Rechtecke ist grösser als der ent-