Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 6

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Ungelöste Probleme

Nr. 52. Vermutlich gilt die folgende Aussage[1]):
Ist $k \geqslant 2$ ganz und ist ein eigentliches zentralsymmetrisches konvexes Polytop des k-dimensionalen euklidischen Raumes im Sinne der Elementargeometrie in n inhaltsgleiche Simplizes zerlegt, so ist n gerade.

Wie uns Herr J. RÄTZ mitteilte, wurde die Richtigkeit dieser Vermutung im ebenen Sonderfall eines Quadratbereiches sichergestellt. P. MONSKY[2]) zeigte nämlich, dass sich ein Quadrat nicht in eine ungerade Anzahl flächengleicher Dreiecke zerlegen lässt. Dies wurde unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass die Koordinaten der Dreieckseckpunkte mit der Quadratseitenlänge kommensurabel sind, schon vorher von J. THOMAS[3]) nachgewiesen. Ausgangspunkt bildete eine Studie von F. RICHMAN und J. THOMAS[4]).

Es ist nicht ganz ausgeschlossen, dass unsere hier gewählte k-dimensionale sich auf beliebige zentralsymmetrische Polytope beziehende Formulierung den wesentlichen Kern des Problems besser erkennen lässt, so dass man dadurch der Lösung näher gebracht wird.

H. HADWIGER

[1]) Dieses Problem wurde u.a. im Rahmen eines Kolloquiums über spezielle geometrische Fragen im Sommersemester 1967 in Bern erörtert.

[2]) On Dividing a Square into Triangles, Amer. Math. Monthly 77, 161–164 (1970).

[3]) A Dissection Problem, Math. Mag. *41*, 187–190 (1968).

[4]) Problem 5479, Amer. Math. Monthly *74*, 329 (1967).

Kleine Mitteilungen

Zu einem Satz über räumliche Fünfecke.

In einer Arbeit[1]), die kürzlich in dieser Zeitschrift erschienen ist, beweist B. L. VAN DER WAERDEN mittels gruppentheoretischer Überlegungen den Satz: *Sind in einem räumlichen Fünfeck ABCDE alle Seiten gleich a und alle Winkel gleich α*[2]), *so ist es eben.* Im gleichen Heft geben W. LÜSSY und E. TROST einen Beweis mit rechnerischen Methoden der elementaren Schulgeometrie. Ich möchte zeigen, dass sich der Satz auch im Rahmen der Schulgeometrie gewinnen lässt, wenn man die Symmetrieeigenschaften der Figur etwas ausschöpft.

Beweis: 1. Hat ein Punkt P von den Ecken eines Dreiecks UVW in dieser Reihenfolge die Abstände x, y, z, so wollen wir sagen, P sei vom Typus (x, y, z) bezüglich U, V, W. Liegt P nicht in der Ebene des Dreiecks, so existieren genau zwei Punkte vom Typus (x, y, z). Sie liegen symmetrisch zur Ebene des Dreiecks, haben also insbesondere gleichen Abstand von ihr.

2. Im «regulären» Fünfeck $ABCDE$ haben alle Diagonalen die gleiche Länge d. Drei aufeinander folgende Ecken, etwa A, B, C, bilden ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten $AB = BC = a$, $CA = d$. H bezeichne die Ebene des Dreiecks ABC. Wir zeigen nun:

[1]) El. Math. *25*, 73–78 (1970).

[2]) Ein solches räumliches Fünfeck soll im folgenden «regulär» genannt werden.

Liegt eine der beiden Ecken D, E nicht in H, so auch die andere nicht. Nehmen wir an, die Ecke D liege nicht in H, so ist D Spitze eines Tetraeders über der Grundfläche ABC. Bezüglich A, B, C ist D vom Typus (d, d, a) und E vom Typus (a, d, d). Führen wir mit dem Tetraeder $ABCD$ eine Halbdrehung um das Lot von B auf AC aus, so geht die Ebene H in sich über, B bleibt fest, die Ecken A, C werden vertauscht. D wird daher in einen Punkt Q übergeführt, der bezüglich der Ecken A, B, C in ihrer anfänglichen Lage vom Typus (a, d, d) ist und somit eine mögliche Lage für die Ecke E darstellt. Die zweite mögliche Lage für E erhalten wir aus Q durch Spiegelung an der Ebene H. E hat also den gleichen Abstand von der Ebene des Dreiecks ABC wie D. Entweder liegen beide Punkte D, E ausserhalb dieser Ebene, oder beide in ihr. Da unter vier Ecken eines Fünfecks stets drei aufeinanderfolgende sind, ergibt sich: *Liegen vier Ecken eines «regulären» Fünfecks $ABCDE$ in einer Ebene, so ist das Fünfeck eben.*

3. Wäre das räumliche Fünfeck aus Draht, so könnten wir es auf einen Tisch stellen. Das heisst: Es existiert eine Ebene F, welche drei Ecken des Fünfecks enthält und die übrigen beiden Ecken nicht trennt. Jene drei Ecken bilden ein Dreieck mit den Seiten a, a, d oder d, d, a.

a) Das Dreieck habe die Seiten a, a, d. Es sei z.B. das Dreieck ABC. Dann liegen die Ecken D und E auf der gleichen Seite der Ebene F, oder aber beide in ihr. Im letztern Fall bleibt nichts zu beweisen. Verfolgen wir den andern Fall. Es bezeichne M die mittelsenkrechte Ebene zu AC, die B enthält. Da F ein Lot auf M enthält, nämlich AC, ist $F \perp M$. Spiegelt man die Ecke D an der Ebene M, so liegt das Bild D^* daher auf der gleichen Seite von F wie D und also auch wie E. Ferner hat D^* bezüglich A, B, C den gleichen Typus wie E. Daher fällt D^* auf E. DE steht senkrecht auf der Spiegelebene M, ist also $\parallel AC$. Die vier Ecken A, C, D, E liegen in einer Ebene. Das Fünfeck $ABCDE$ ist eben.

b) Hat das Dreieck in der Ebene F die Seiten d, d, a, so schliesst man ganz analog, wobei M die mittelsenkrechte Ebene zur Seite mit der Länge a ist.

H. Irminger, Wetzikon

On a Theorem of Burnside

Burnside [1] proved the relation $N \equiv h \pmod{16}$, where $N \equiv 1 \pmod 2$ is the odd order of a group and h is the number of its conjugate sets. Hirsch [2] made an improvement of this result as follows:

Theorem 1. Let $N = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_k^{a_k}$ be the order of a group G, the p's being primes, h the number of its conjugate sets, and d the g.c.d. of the numbers $p_i^2 - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Then $N \equiv h \pmod{2\,d}$, if N is odd, and $N \equiv h \pmod 3$, if N is even and $(N, 3) = 1$.

Here we will prove the theorem of Hirsch in a different way (and easier way), as indicated in the footnote of his paper, i.e. by extension of Burnside's argument. Further we prove the following theorem:

Theorem 2. There is no integer $x \geqslant 2$ with the property, that $N \equiv h \pmod x$ for all non-abelian groups of even order.

Proof of Theorem 1: h is also the number of all simple characters of the group. Character-notation as usual: χ_i $(i = 1, \ldots, h)$. If $n_i = \chi_i(1)$, 1 being the unit of G, then we have

$$\sum_{i=1}^{h} n_i^2 = N .$$

Suppose $\chi_i(1) = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, s$. It is known, that $n_i | N$. Therefore primefactors of $n_i \neq 1$ are primefactors of N. We have, writing $p_t^2 - 1 = d v_t$,

$$n_i^2 = \prod_t p_t^{a_{ti} \cdot 2} = \prod_t (d v_t + 1)^{a_{ti}} \equiv 1 \pmod d, \Rightarrow n_i^2 = d l_i + 1 \quad \text{(say)} .$$

We find

$$s + \sum_{i=s+1}^{h} (d l_i + 1) = N\,, \quad \text{or} \quad d\left(\sum_{i=s+1}^{h} l_i\right) + h = N\,. \tag{1}$$

Let now N be odd, then $\chi_i \neq \overline{\chi_i}$, for all non-trivial simple characters. Here $\overline{\chi_i}$ means the complex conjugate character of χ_i. $\overline{\chi_i}$ is also a simple character. The degrees of χ_i and $\overline{\chi_i}$ are the same. Therefore we can collect up all the $n_i \neq 1$, in pairs of equal value, and we have:

$$\sum_{i=s+1}^{h} l_i \equiv 0 \pmod 2 \tag{2}$$

(1) and (2) together gives $N \equiv h \pmod{2\,d}$.

If now N is even and $(N, 3) = 1$, then $n_i^2 \equiv 1 \pmod 3$, by virtue of $3 \nmid n_i \mid N$. It follows that

$$N = s + \sum_{i=s+1}^{h} n_i^2 \equiv s + (h - s) = h \pmod 3 \qquad \text{q.e.d.}$$

Proof of Theorem 2: Let D_n be the dihedral-group of order $N = 2\,n$, $n \equiv 0 \pmod 2$. If theorem 2 would not be true, then $N \equiv h \pmod x$ or $4 + 4\,t \equiv 4 + t \pmod x$. Here t denotes the number of all irreducible representations of degree 2; the irreducible ones remaining are the four representations of degree 1 ([3], p. 180). Choose $t = 1$ (the group D_4), then $3 \equiv 0 \pmod x$, or $x = 3$. But the group A_4 with $4 = h \equiv N = 12 \pmod 3$ gives a contradiction. – q.e.d.

R. W. VAN DER WAALL, Nijmegen

REFERENCES

[1] BURNSIDE, W., *Theory of Groups*, 2nd edition (Cambridge 1911), p. 295.
[2] HIRSCH, K. A., *On a Theorem of Burnside*, Quart. J. Math. Oxford (2) *1*, 97–99 (1950).
[3] SPEISER, A., *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 4. Aufl. (Birkhäuser-Verlag, Basel 1956).

Aufgaben

Aufgabe 609. In der Gaußschen Zahlenebene werde dem «Punkt» $z = x + i\,y$ der Punkt

$$z' = \frac{\alpha\,z + \beta}{\gamma\,z - \alpha}\,, \quad \gamma \neq 0; \qquad \alpha, \beta, \gamma \text{ komplexe Zahlen}$$

zugeordnet. Welches ist die Bahn eines variablen Punktes, dessen Bewegung in jedem Moment auf den jeweils zugeordneten Punkt hin gerichtet ist?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Der Spezialfall $\Delta = \alpha^2 + \beta\,\gamma = 0$, also z' konstant, ist trivial. Ist $\Delta \neq 0$, so geht die Transformation $z \to z'$ durch die Substitution $z = (1/\gamma)\,(\alpha + \delta\,\zeta)$, $z' = (1/\gamma)\,(\alpha + \delta\,\zeta')$ über in $\zeta' = 1/\zeta$, wobei $\delta^2 = \alpha^2 + \beta\,\gamma$ gelte.

Die Koordinaten der Punkte ζ und ζ', d.h. von $P(x, y)$ und P' $(x' = x/(x^2 + y^2), y' = -y/(x^2 + y^2))$ genügen der Gleichung $x\,x' + \lambda\,(x\,y' + y\,x') - y\,y' = 1$ für jeden reellen Wert von λ. Die Punkte P, P' sind also harmonisch konjugiert in bezug auf alle Hyperbeln des Büschels $x^2 + 2\,\lambda\,x\,y - y^2 = 1$. Da der dem Punkt ζ konjugierte Punkt stets auf der Tangente in ζ an den durch ζ gehenden Büschelkegelschnitt liegt, so gehören diese gleichseitigen Hyperbeln zu den gesuchten Bahnkurven. Die Substitution $z \to \zeta$ lässt sich als Ähnlichkeitsabbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene deuten. In der z-Ebene sind diese Bahnkurven ebenfalls gleichseitige Hyperbeln. Sie gehen durch die beiden Fixpunkte von $z \to z'$ (in der ζ-Ebene sind dies $P(1, 0)$ und $P(-1, 0)$) und haben den Punkt α/γ zum Mittelpunkt.