Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 3

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Kegel 2. Ordnung. Eine spezielle Kummersche Konfiguration bilden die 12 Ecken des Kubooktaeders Π_3 zusammen mit den Fernpunkten F_1, F_2, F_3, F_4 der 4 Flächenachsen des Oktaeders. Die Ebenen dieser Konfiguration ergeben sich so: a) Von jeder Ecke von Π_3 gehen 4 Kanten aus, deren Endpunkte bilden eine Konfigurationsebene ε, in der auch zwei Punkte F_i liegen; das sind 12 Ebenen ε. b) Die zu zwei parallelen Dreiecksflächen von Π_3 parallele Ebene durch M ist ebenfalls eine Konfigurationsebene ε; das sind die restlichen 4 Ebenen ε. Jede dieser 4 Ebenen schneidet Π_3 nach einem regelmässigen Sechseck, und das zeigt, dass der «charakteristische Sechserwurf» dieser speziellen Kummerschen Konfiguration der eines regelmässigen Sechseckes ist.

Je zwei Punkte P haben als Verbindungsgerade eine «Diagonale» der Kummerschen Konfiguration. Es gibt $16 \cdot 15/2 = 120$ Diagonalen, sie verteilen sich auf a) die 24 Kanten von Π_3, b) die 12 Diagonalen der 6 Quadrate von Π_3, c) die 30 Raumdiagonalen von Π_3, d) die 6 Ferngeraden durch je zwei Punkte F_i, e) die 24 Geraden, die in den Ecken jeder Dreiecksfläche von Π_3 auf dieser Fläche normal stehen, und schliesslich f) die 24 Kantenlote des Oktaeders. Kurz gesagt: *Die 12 Mittelpunkte und die 4 Fernpunkte der Kantenlote eines regulären Oktaeders bilden die 16 Punkte einer Kummerschen Konfiguration. Die Kantenlote sind 24 von den 120 Diagonalen dieser Konfiguration.*

FRITZ HOHENBERG, Graz

Kleine Mitteilungen

Ein Satz über Matrixeigenwerte

Die Eigenwerte einer hermiteschen, schiefhermiteschen bzw. unitären Matrix sind reell, rein imaginär (oder 0) bzw. vom Betrage 1. Diese drei wohlbekannten Aussagen, die man üblicherweise gesondert beweist, sind bemerkenswerterweise Sonderfälle eines einzigen Satzes, der sich sehr leicht ergibt und auch noch weitere Anwendungen hat.

Satz. Genügen eine quadratische Matrix A und ihre konjugiert Transponierte A^* einer Beziehung der Form

$$f(A, A^*) = 0 \tag{1}$$

mit

$$f(A, A^*) = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} A^{*\mu} A^{\nu}, \tag{2}$$

so gehören die Eigenwerte von A der durch

$$f(z, \bar{z}) = 0 \tag{3}$$

dargestellten Menge komplexer Zahlen an.

Beweis. x sei ein Eigenvektor zu einem Eigenwert λ von A. Dann ist

$$A x = \lambda x, \quad A^{\nu} x = \lambda^{\nu} x, \quad x^* A^{*\mu} = \bar{\lambda}^{\mu} x^* \qquad (x^* = \bar{x}^T),$$

also wegen (1) und (2) auch

$$0 = x^* f(A, A^*)\, x = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\, x^* A^{*\mu} A^{\nu} x = \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu}\, \bar{\lambda}^{\mu} \lambda^{\nu} x^* x = x^* x\, f(\lambda, \bar{\lambda}) .$$

Da x ein Eigenvektor ist, gilt $x^* x \neq 0$, und der Satz ist schon bewiesen.

Für normale Matrizen ($A A^* = A^* A$) folgt der Satz auch aus einem bekannten Ergebnis von G. FROBENIUS (Satz 16.1 in C. C. MacDuffee, The Theory of Matrices, Springer, Berlin 1933), weil die Nullmatrix $f(A, A^*)$ in (1) den Eigenwert 0 hat.

$f(z, \bar{z}) = \bar{z} - z$ bzw. $\bar{z} + z$ bzw. $\bar{z} z - 1$ liefert nun die ganz zu Anfang genannten Aussagen.

Weitere Anwendungsbeispiele sind:

1. Ist $A^* = c A$ ($A \neq 0$), so muss $c = e^{i\alpha}$ sein, und die Eigenwerte von A liegen auf der Geraden $z(t) = t\, e^{-i\alpha/2}$.

2. Ist $B^* B = B^* + B$, so liegen die Eigenwerte von B auf dem Kreis $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

3. Es gibt keine quadratische Matrix C mit $C^* C = -I$.

4. $\tilde{A} = K^{-1} A^* K$ (A quadratisch, K definit hermitesch) heisst *K-Adjungierte* von A (vgl. M. C. Pease, Methods of Matrix Algebra, Academic Press, New York 1965). Genügen A und $\tilde{A}$ einer Beziehung $f(A, \tilde{A}) = 0$ mit f wie in (2), so gehören die Eigenwerte von A der durch $f(z, \bar{z}) = 0$ gegebenen Menge an.

ERWIN KREYSZIG, Universität Düsseldorf

An Elementary Proof of Tucker's Theorem

1. Mr. TUCKER gave the following interesting

Theorem. *In a triangle, its circumcenter and symmedian point are collinear with the orthocenter of its pedal triangle.*

This can be proved by means of the trilinear coordinates. We will give here a proof by Plane Geometry.

2. Let there be given a triangle ABC. Let O, G and H be its circumcenter, centroid, and orthocenter, respectively. We designate by A', B', C' the feet of the altitudes, perpendicular to the sides from the opposite vertices A, B, C, and by H' the orthocenter of the pedal triangle $A'B'C'$.

At first, we state a number of lemmas. Some of them will be found in any book on the Plane Geometry, and their proofs may be omitted. We refer, e.g., to NATHAN ALTSHILLER-COURT's «*College Geometry*».

Lemma 1 [1]. *The orthocenter H is the incenter, or the excenter, of the triangle $A'B'C'$.*

We take here the case of incenter only, but the case of excenter can be analogously treated.

Lemma 2. *O, G and H are collinear, and there holds*

$$HG:GO = 2:1 . \tag{1}$$

The line OHG is called the Euler line.

Lemma 3. *Let A_1, B_1, C_1 be the mid-points of $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, respectively, and G_1, I_1 be the centroid, the incenter of the triangle $A_1B_1C_1$. Then, two triangles $A'B'C'$ and $A_1B_1C_1$ are in homothetic position, with G_1 as the homothetic center. Hence three points H, I_1, G_1 are collinear, and*

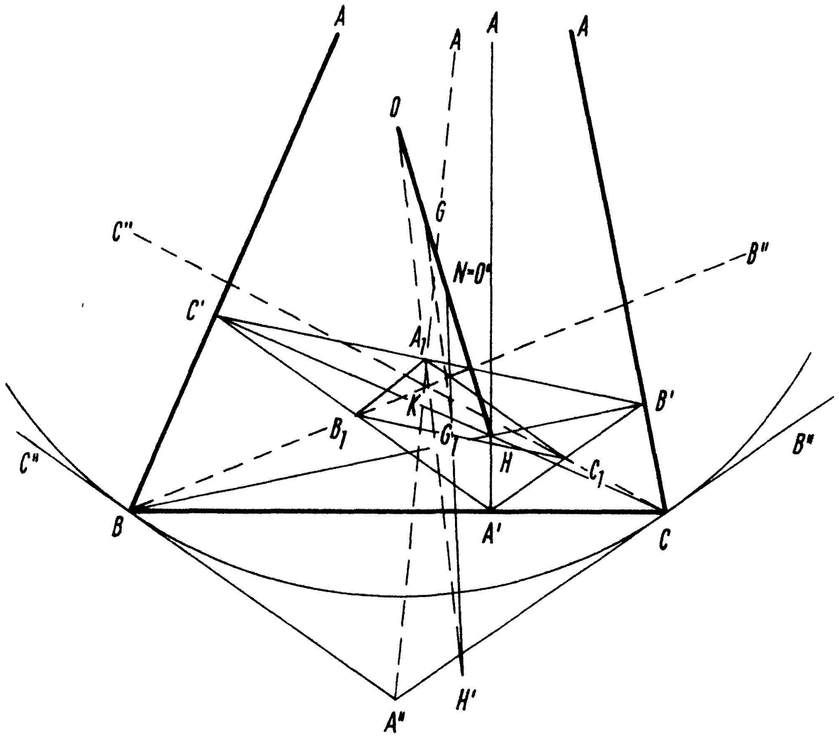
$$HG_1:G_1I_1 = 2:1 . \tag{2}$$

From (1) and (2) we see that GG_1 is parallel to OI_1:

$$GG_1 \parallel OI_1 . \tag{3}$$

Lemma 4 [2]. *Let N be the center of nine-point circle of the triangle ABC. Then N, G, H are collinear, and there holds*

$$NG:GO = 1:2 . \tag{4}$$



As is well known, N and G_1 coincide with the circumcenter O' and the centroid G' of triangle $A'B'C'$. Thus, by lemma 2, N, G_1 and H' are collinear, and

$$NG_1 : G_1H' = 1:2 . \tag{5}$$

Lemma 5 [3]. *The lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent at one point.*

This point is called the *symmedian point* of the triangle ABC. We denote it by K.

Lemma 6 [4]. *Let $A''B''C''$ be the tangential triangle of ABC, where of course $B''C''$, $C''A''$, $A''B''$ are tangent at A, B, C, respectively, to the circumcircle of ABC.*

Then AA'', BB'', CC'' are concurrent at the point K.

In other words, K is the *Gergonne point* of the triangle $A''B''C''$.

Lemma 7. *Two triangles $A_1B_1C_1$ and $A''B''C''$ are in homothetic position, with K as the homothetic center.*

Proof. It is evident that $A_1B_1 \parallel A''B''$, $B_1C_1 \parallel B''C''$, $C_1A_1 \parallel C''A''$, and thus two triangles $A_1B_1C_1$, $A''B''C''$ are similar.

On the other hand, four points A, A_1, A'', K are collinear from lemmas 5 and 6. Similarly, B, B_1, B'', K; C, C_1, C'', K are collinear. Hence we know that K is the homothetic center of $A_1B_1C_1$ and $A''B''C''$.

3. *Proof of the theorem.* According to (4) and (5), GG_1 is parallel to OH':

$$GG_1 \parallel OH' . \tag{6}$$

From (3) and (6), three points O, I_1, H' are collinear, and by lemma 7, O (the incenter of $A''B''C''$), I_1 (the incenter of $A_1B_1C_1$) and K (the homothetic center) are collinear.

Thus we know that O, H' and K are collinear, and our theorem is proved.

JIROKICHI NAGATOMO, Chiba University, Japan

REFERENCES

Pages and Nos. are referred to NATHAN ALTSHILLER-COURT: *College Geometry*, 1957.

[1] p. 101, No. 201, Theorem.

[2] p. 104, No. 209, Theorem (b).

[3] p. 249, No. 564, Theorem (a), p. 252, No. 572, Theorem.

[4] p. 254, No. 580, Remark.