

Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 6

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ungelöste Probleme

Nr. 51. Es bezeichne $A \subset R$ einen eigentlichen konvexen Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes R und A' den Normalriss von A in eine hier fest gewählte, und auch nachfolgend stets gleichbleibende Ebene $E \subset R$. Da A innere Punkte aufweist, trifft dies auch für den Eibereich A' bezüglich seiner Trägerebene E zu. Bedeuten V und F bzw. f und l das Volumen und die Oberfläche von A bzw. den Flächeninhalt und den Umfang von A' , so ist offenbar $V, F, f, l > 0$.

Es liegt auf der Hand, die Quotienten $q = F/V$ und $q' = l/f$, also die Verhältnisse von Mass und Randmass des Körpers A und seiner Projektion A' , miteinander zu vergleichen. Für einige einfache Testfälle sollen die Befunde festgestellt und in der nachfolgenden Tafel eingetragen werden.

I. A = Kugel vom Radius 1; II. A = Würfel der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; III. A = reguläres Tetraeder der Kantenlänge 1, E parallel zu einer Seitenfläche; IV. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E parallel zur Grundfläche; V. A = Kegel vom Radius 1 und der Höhe 1, E orthogonal zur Grundfläche.

A	q	q'
I	3	2
II	6	4
III	$6\sqrt{6}$	$4\sqrt{3}$
IV	$3 + 3\sqrt{2}$	2
V	$3 + 3\sqrt{2}$	$2 + 2\sqrt{2}$

Wie unmittelbar ablesbar, gilt in diesen Fällen stets $q > q'$ und viele weitere Experimente würden die Vermutung bekräftigen, dass hinter diesem Erfahrungsergebnis ein allgemein gültiger Satz stehen könnte, wonach für den ähnlichkeitsinvariant angeetzten Quotienten

$$p = q/q' = Ff/Vl \quad (1)$$

stets $p > 1$ gelten dürfte. Ein Indiz liefert auch die Feststellung, dass dies für rotationssymmetrische Eikörper jedenfalls dann zutrifft, wenn E orthogonal zur Rotationsachse gewählt wird. In der Tat gilt nach einer bekannten Ungleichung¹⁾ $6V \leq a(3F - 4\pi a^2)$, wobei a den Äquatorkreisradius von A anzeigt. Der Normalriss A' ist dann kongruent mit einem Äquatorkreis von A , sodass also $f = \pi a^2$ und $l = 2\pi a$ gilt. Mit einfacher Umrechnung resultiert jetzt $p \geq 1 + (2\pi a^3/3V)$, wobei Gleichheit für ein Zylotop, d. h. für einen Zylinder mit zwei aufgesetzten Halbkugeln besteht.

¹⁾ Math. Ann. 122 (1950); Seite 175 (Ib).

Wir präzisieren nun die aufgeworfene Frage, indem wir mit dem Ansatz

$$p_0 = \inf p = \inf (Ff/Vl) \quad (2)$$

das Problem aufzeigen, das auf alle eigentlichen Eikörper A des gewöhnlichen Raumes R bezogene Infimum p_0 des Quotientenverhältnisses

$$p = p(A) = [F(A)/V(A)]/[l(A')/f(A')] \quad (3)$$

zu ermitteln.

Zunächst kann man leicht erkennen, dass

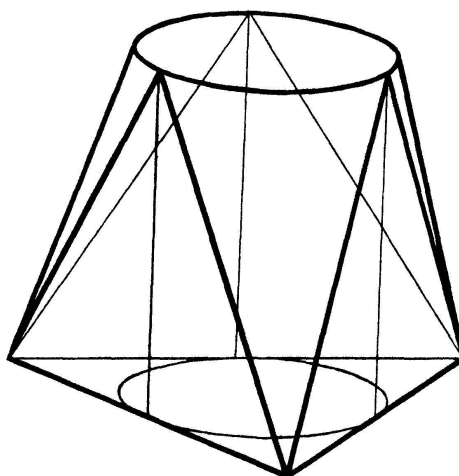
$$p_0 \leq 1 \quad (4)$$

ausfallen muss. Ist nämlich A ein gerader Kreiszylinder vom Radius 1 und der Höhe h und wählt man E orthogonal zur Rotationsachse, so ergibt sich $p = (1 + h)/h$, sodass mit $h \rightarrow \infty$ auf (4) geschlossen werden kann.

Nach der eingangs erörterten Hypothese, wonach stets $p > 1$ gelten müsste, würde andererseits $p_0 \geq 1$ sein, sodass sich mit $p_0 = 1$ die vollständige Lösung des aufgeworfenen Problems kennzeichnen liesse.

Leider ist aber die Vermutung, die sich mit der Musterung vieler Beispiele aufdrängt, falsch!

Dies wollen wir nachfolgend zeigen: Es sei K ein Kreisbereich vom Radius 1, D ein in der parallelen Ebene E im Abstand h liegendes reguläres Dreieck der Seitenlänge $2\sqrt{3}$, derart, dass die Verbindungsgerade des Zentrums von K mit dem Schwerpunkt von D auf E orthogonal steht. Der Normalriss von K in die Ebene E fällt dann mit dem Inkreis von D zusammen. Die konvexe Hülle von K und D im Raum R ist ein allgemeines Prismatoid P mit der Deckfläche K , der Grundfläche D und der Höhe h (vgl. hierzu die Figur).



Für die erforderlichen Rechnungen ist es nützlich, das Prismatoid P durch die Schnittbereiche $S(t)$ zu kennzeichnen, die von den Ebenen parallel zu E im Abstand th ($0 \leq t \leq 1$) von der Grundebene E aus P ausgeschnitten werden. Es ist nämlich $S(t) = (1 - t) D + t K$, wobei die angeschriebene Verbindung die Minkowskische Linearkombination bezeichnet. $S(t)$ ist der äussere Parallelbereich eines regulären

Dreiecks der Seitenlänge $2\sqrt{3}(1-t)$ der Spanne t . Für Flächeninhalt und Umfang ergeben sich die Formeln

$$f(t) = 3\sqrt{3}(1-t^2) + \pi t^2; \quad l(t) = 6\sqrt{3}(1-t) + 2\pi t.$$

Offensichtlich sind $f = f(0) = 3\sqrt{3}$ und $l = l(0) = 6\sqrt{3}$ die Masszahlen des Normalrisses P' von P . Mit passender Integration gewinnt man

$$V = [(6\sqrt{3} + \pi)/3] h,$$

$$F = 3\sqrt{3}(1+h) + \pi + 3 \int_0^{\pi/3} \sqrt{1+h^2-4\cos w(1-\cos w)} dw.$$

Mit naheliegender einfacher Abschätzung resultiert

$$F < (3\sqrt{3} + \pi)(1 + \sqrt{1+h^2}),$$

sodass sich gemäss (1)

$$p < \frac{9\sqrt{3} + 3\pi}{12\sqrt{3} + 2\pi} \left(\frac{1 + \sqrt{1+h^2}}{h} \right)$$

ergibt. Mit $h \rightarrow \infty$ schliesst man nach (2) auf

$$p_0 \leq (9\sqrt{3} + 3\pi)/(12\sqrt{3} + 2\pi) \sim 0,924\dots, \quad (5)$$

sodass also jedenfalls $p_0 < 1$ ausfällt.

Schliesslich wollen wir noch darauf hinweisen, dass sich die Frage nach dem Wert von p_0 nicht etwa dadurch trivialisiert, dass p beliebig kleine Werte annehmen kann, sodass $p_0 = 0$ wäre, sondern dass gezeigt werden kann, dass stets $p > 1/2$ gilt. Der Nachweis kann an dieser Stelle nicht geführt werden. Im Hinblick hierauf wird mit Sicherheit

$$p_0 \geq 1/2 \quad (6)$$

gelten. Das hier vorgelegte ungelöste Problem lautet also: Welches ist der Wert des mit (2) angesetzten Infimums p_0 ($0,500 \leq p_0 \leq 0,924$)? H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

An Elementary Set Partition Problem

In an earlier note R. SCHNEIDERREIT [2] considers the problem of distributing the numbers $1, 2, \dots, n$ into two boxes so that not more than m consecutive numbers are in the same box; permuting the numbers in a box or interchanging the boxes does not give a new distribution. If $F_m(n)$ denotes the number of such distributions it is shown that

$$F_m(n) = F_m(n-1) + \dots + F_m(n-m), \quad n > m \quad (1)$$