Kleine Mitteilungen

Es sei $\sphericalangle C O A_2 = \varphi$; mit $\overline{O C} = a_1 \cos\varphi$ und $\overline{C A_2} = a_1 \sin\varphi$ ergibt sich:

$$\overline{O\underline{A}_2}^2 = a_1^2 \cos^2\varphi + (a_1 \sin\varphi - b_1)^2 \quad \Big| \quad \overline{O\overline{A}_2}^2 = a_1^2 \cos^2\varphi + (a_1 \sin\varphi + b_1)^2$$
$$= a_1^2 + b_1^2 - 2\, a_1\, b_1 \sin\varphi \quad \Big| \quad = a_1^2 + b_1^2 + 2\, a_1\, b_1 \sin\varphi$$

Nun ist aber $2\, a_1\, b_1 \sin\varphi = 2\, a\, b$ (Flächentreue!) und $a^2{}_1 + b^2{}_1 = a^2 + b^2$; damit ergibt sich:

$$\overline{O\underline{A}_2}^2 = (a - b)^2 \quad \Big| \quad \overline{O\overline{A}_2}^2 = (a + b)^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

R. JAKOBI hat seine Konstruktion im Jahre 1952 veröffentlicht und durch kinematische Betrachtungen bewiesen (vgl. [1]). O. TAMASCHKE gab 1963 einen elementargeometrischen Beweis (vgl. [4]). H. SIEBER führte 1967 zwei abbildungsgeometrische Beweise, die nur Drehungen, Parallelverschiebungen und Geradenspiegelungen verwenden (vgl. [3], S. 37–39).

HELMUT SIEBER, Böblingen

LITERATUR

[1] R. JAKOBI, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse*, Z. angew. Math. Mech. *32*, 30 (1952).
[2] M. JEGER, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Räber (Luzern und Stuttgart, 1964).
[3] H. SIEBER, *Achsenaffinitäten im Unterricht*, Der Mathematikunterricht, 9. Jahrgang, 1967, S. 5–47.
[4] O. TAMASCHKE, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach* R. JAKOBI, El. Math. *18*, 3 (1963), S. 58.

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zum Verfahren von Leverrier

Verschiedene mathematische und technische Probleme führen auf die Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\, E - A)\,,$$

wobei A eine beliebige Matrix aus $M_n(\mathrm{K})$, dem Ring der komplexen $n \times n$-Matrizen, und E die Einheitsmatrix ist. Entwickelt man diese Determinante in üblicher Weise als Summe von Produkten ihrer Elemente und ordnet dann nach fallenden Potenzen von λ, so erhält man das Ergebnis

$$p_A(\lambda) = \sum_{\omega=0}^{n} (-1)^\omega\, c_\omega\, \lambda^{n-\omega}\,,$$

wobei $c_0 = 1$, $c_n = \det A$ und für alle $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$c_j = \sum_{[\gamma_1, \cdots \gamma_j] \in K_j} \det \begin{pmatrix} a_{\gamma_1\gamma_1} & \cdots & a_{\gamma_1\gamma_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_j\gamma_1} & \cdots & a_{\gamma_j\gamma_j} \end{pmatrix}$$

ist. K_j ist dabei die Menge sämtlicher Kombinationen j-ter Klasse ohne Wiederholung: $[\gamma_1, \ldots, \gamma_j] \subseteq [1, \ldots, n]$ und $1 \leqq \gamma_1 < \ldots < \gamma \leqq n$. ([6], S. 114).

Diese direkte Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ist sehr aufwendig und für grosse Werte von n nur von theoretischem Interesse. Ein anderes Verfahren, das die Berechnung der Koeffizienten von $p_A(\lambda)$ gestattet, ist unter dem Namen «Verfahren von LEVERRIER» bekannt [1]. Es stellt wohl die älteste Methode dar, wenn man von der obenerwähnten direkten Berechnung absieht. Vor allem besitzt das Verfahren von LEVERRIER gegenüber verschiedenen anderen Verfahren den Vorzug, dass an die betrachtete Matrix A keinerlei zusätzliche Forderung gestellt werden muss. Dieses Verfahren wurde wiederentdeckt von HORST [2], schliesslich verbessert und verallgemeinert von SOURIAU [3], FADDEEV-SOMINSKII [5] und FRAME [4]. Alle diese Überlegungen beruhen auf den sogenannten Newtonschen Formeln, die die Berechnung der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms auf die Berechnung der Spuren der n aufeinanderfolgenden Matrixpotenzen $A, A^2, \ldots, A^n$ und die Lösung eines gewissen linearen Gleichungssystems zurückführen.

Setzen wir

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \sum_{\omega=1}^{n} p_\omega \lambda^{n-\omega} \quad \text{und} \quad s_k = \mathrm{Sp} A^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

so lauten die Newton' schen Formeln

$$s_k + s_{k-1} p_1 + s_{k-2} p_2 + \cdots + s_1 p_{k-1} + k p_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Wir können (2) auch in Form eines linearen Gleichungssystems für die Koeffizienten $p_1, \ldots, p_n$

$$L p = r \tag{3}$$

schreiben, wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ s_1 & 2 & & \\ s_2 & s_1 & 3 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots n \end{pmatrix}, \quad p = \mathrm{col}(p_1, \ldots, p_n) \quad \text{und}$$

$r = \mathrm{col}(-s_1, \ldots, -s_n)$ zu setzen ist. Eine Möglichkeit, das System in (3) nach p aufzulösen, ist die Bestimmung von L^{-1}; dann ist $p = L^{-1} r$. Wir wollen uns jetzt überlegen, wie man die explizite Berechnung der Matrix umgehen kann, indem wir die spezielle Form von L ausnützen.

Zuerst setzen wir $R = L - D$ mit $D = \mathrm{diag}(1, 2, \ldots, n)$, dann $D^{-1} R = B = (b_{kl})$. Mit dieser Bezeichnung ist $L = D(E + B)$ und daher

$$L^{-1} = (E + B)^{-1} D^{-1}. \tag{4}$$

Aus der Struktur der Matrizen D und R findet man leicht, dass die Elemente der Matrix B den Bedingungen

$$b_{kl} = 0 \quad l \geq k \tag{5}$$

genügen. Nach (5) besitzt B daher nur den n-fachen Eigenwert 0 und erfüllt somit die Gleichung $B^n = 0$, woraus trivialerweise

$$B^{n+j} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{6}$$

folgt.

Nach einem bekannten Satz (siehe z.B. [8], S. 98, Satz 49) gilt dann für die Matrix B

$$(E + B)^{-1} = \sum_{\omega=0}^{\infty} (-1)^\omega B^\omega. \tag{7}$$

Mit (6) reduziert sich die unendliche Summe auf der rechten Seite in (7) auf eine endliche Summe

$$(E + B)^{-1} = \sum_{\omega=0}^{n-1} (-1)^\omega B^\omega. \tag{8}$$

Schliesslich folgt aus (4) und (8) das Ergebnis

$$L^{-1} = \sum_{\omega=0}^{n-1} (-1)^{\omega} B^{\omega} D^{-1} .$$

In (3) eingesetzt, erhalten wir für die Unbekannten $p_1, \ldots, p_n$

$$p = \operatorname{col}(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\omega=0}^{n-1} (-1)^{\omega} B^{\omega} D^{-1} r .$$

Wir haben damit die Inversion der Matrix L auf Multiplikationen von Matrizen (derselben Ordnung) zurückgeführt.

R. Z. Domiaty, Graz

LITERATURVERZEICHNIS

[1] U. J. J. Leverrier, *Sur les variations seculaires des elements des orbites pour les sept planètes principales*; Journal de mathématiques [1] *5*, 230 (1840); *Connaissance des Temps pour l'an 1843*, Additions, 1–66 (Paris 1840).

[2] P. Horst, *A Method for Determining the Coefficients of a Characteristic Equation*, Ann. math. Statist. *6*, 83 (1935).

[3] J. M. Souriau, *Une méthode pour la décomposition spectrale et l'inversion des matrices*, C. R. Acad. Sci., Paris *227*, 1010 (1948).

[4] J. S. Frame, *A Simple Recursion Formula for Inverting a Matrix*. (Abstract), Bull. Amer. Math. Soc. *55*, 1045 (1949).

[5] D. K. Faddeev, I. S. Sominskii, *Sbornik zadac po vyssei algebre* [Aufgabensammlung zur höheren Algebra, russ.) Gostechisdat (Moskow-Leningrad 1949), S. 160.

[6] G. Kowalewski, *Einführung in die Determinantentheorie* (W. de Gruyter, Berlin 1942).

[7] J. V. Uspensky, *Theory of Equations* (McGraw-Hill, New York – Toronto – London 1948).

[8] C. C. MacDuffee, *The Theory of Matrices* (Springer-Verlag, Berlin 1933).

Eine Bemerkung zur eindeutigen Primfaktorenzerlegung in Halbgruppen

Es sei H eine kommutative Halbgruppe mit neutralem Element e. Sie sei ferner regulär, d.h. in H gelte die Streichungsregel ($a\,c = b\,c \Rightarrow a = b$ für alle $a, b, c \in H$). Wie üblich heisst a Teiler von b (in Zeichen $a \mid b$), wenn es ein $c \in H$ mit $a\,c = b$ gibt. Das Element e soll keine Teiler $\neq e$ haben, d.h. also $H \setminus \{e\}$ ist eine Unterhalbgruppe. Ein Element $a \in H$ heisst *irreduzibel*, wenn es ausser a und e keine Teiler hat. $p \in H$ heisst *Primelement*, wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $p \mid a\,b \Rightarrow p \mid a$ oder $p \mid b$. Bekanntlich ist jedes Primelement irreduzibel.

Hilfssatz: *Gibt es in H eine assoziative Verknüpfung $*$ mit den Eigenschaften:*

$$a * b \mid a , \quad a * b \mid b \qquad \text{(für alle } a, b \in H) \tag{1}$$

$$a * b \mid c , \quad c \mid a , \quad c \mid b \Rightarrow c = a * b \qquad \text{(für alle } a, b, c \in H) \tag{2}$$

so gilt:

$$c \mid a , \quad c \mid b \Rightarrow c \mid a * b \qquad \text{(für alle } a, b, c \in H) . \tag{2'}$$

Beweis mittels (1) und (2):

Aus $c \mid a, c \mid b$ ergibt sich $a * c = c$, $b * c = c$, wegen der Assoziativität also $(a * b) * c = a * (b * c) = a * c = c$ und daher nach (1) $c \mid a * b$.

Bekanntlich besagen (1), (2'), dass $a * b$ der ggT von a, b (und somit $*$ assoziativ) ist. Daraus ergibt sich[1]: Jedes irreduzible Element ist Primelement.

Setzt man nun noch die Gültigkeit des Teilerkettensatzes voraus (das heisst: im Falle $a_{n+1} \mid a_n$, für alle $n \in N$ ist stets $\{a_n \mid n \in N\}$ endlich), so folgt bekanntlich[1] weiter, dass jedes Element von H bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primelementen dargestellt werden kann. Eine Verknüpfung $*$ mit (1), (2) kann man nun leicht angeben, wenn in H eine Relation «$<$» mit $a \mid b \Rightarrow a \leq b$ (für alle $a, b \in H$) existiert, bezüglich der stets $T(a) \cap T(b)$ (mit $T(a)$ als der Menge der Teiler von a) ein maximales Element[2] hat. Ordnet man jetzt jedem Paar a,b als Verknüpfungsergebnis $a * b$ ein maximales Element von $T(a) \cap T(b)$ zu, so erfüllt $*$ offenbar die Bedingungen (1) und (2).

Die im Vorstehenden an die kommutative Halbgruppe H mit dem neutralen Element e und die Relation «$<$» gestellten Forderungen (mit Ausnahme der Assoziativität von $*$) sind nun erfüllt, wenn man «$<$» als eine mit der Halbgruppenverknüpfung verträgliche (d.h. $a < b \Rightarrow a\,c < b\,c$) Wohlordnung voraussetzt. Offenbar ist dann H regulär. Man zeigt ferner, dass e kleinstes Element ist. Aus $a < e$ würde nämlich $a^n < a^{n-1}$ $(n \in N)$ folgen, im Widerspruch dazu, dass die Kette $\{a^n \mid n \in N\}$ ein kleinstes Element haben muss. Wegen $e \leq c$ gilt nun $a \leq a\,c$ und daher $a \mid b \Rightarrow a \leq b$.

Jedes Element von H hat jetzt nur endlich viele Teiler. Im anderen Falle würde es nämlich b_ν, $c_\nu \in H$ $(\nu \in N)$ geben mit $b_\nu\, c_\nu = a$ und $\mu < \nu \Rightarrow b_\mu \leqq b_\nu$ $(\mu, \nu \in N)$, daraus würde aber $\mu < \nu \Rightarrow c_\mu > c_\nu$ $(\mu, \nu \in N)$ folgen, so dass $\{c_\nu \mid \nu \in N\}$ kein kleinstes Element haben könnte. Es gilt also der Teilerkettensatz, und $T(a) \cap T(b)$ hat stets ein grösstes Element. Dann wird wie oben $a * b$ als dieses grösste Element von $T(a) \cap T(b)$ gewählt. Setzt man jetzt noch die Assoziativität von $*$ voraus, so ist jedes Element von H bis auf die Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primelementen darstellbar.

Satz: *In einer kommutativen Halbgruppe mit neutralem Element e ist genau dann $H \setminus \{e\}$ Unterhalbgruppe und jedes Element eindeutig (abgesehen von der Reihenfolge) als Primelementeprodukt darstellbar, wenn es eine mit der Halbgruppenverknüpfung verträgliche Wohlordnung gibt und diejenige Verknüpfung assoziativ*[3] *ist, die jedem Elementepaar den bezüglich der Wohlordnung grössten gemeinsamen Teiler zuordnet.*

Beweis: Es wurde gezeigt, dass die Bedingung hinreichend ist. Die Notwendigkeit wird so bewiesen: Die Menge $\mathfrak{P}$ der Primelemente von H sei wohlgeordnet. Es sei $f_a\colon \mathfrak{P} \to N$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in N mit $a = \prod_{p \in \mathfrak{P}} p^{f_a(p)}$, wobei $f_a(p) \neq 0$ für endlich viele $p \in \mathfrak{P}$. Die Elemente $a, b \in H$ werden antilexikographisch geordnet nach dem bezüglich der Wohlordnung von $\mathfrak{P}$ grössten Element $p \in \mathfrak{P}$, für das $f_a(p)$ von $f_b(p)$ differiert[4]. Diese Ordnung ist eine Wohlordnung. Man zeigt das unter Benutzung bekannter[5] Überlegungen. Wegen $f_{ab} = f_a + f_b$ ist diese Wohlordnung verträglich mit der Halbgruppenverknüpfung. Jedes Elementepaar a,b besitzt einen ggT, und die ggT-Bildung ist assoziativ. Der grösste gemeinsame Teiler von a,b ist aber zugleich das bezüglich der Wohlordnung grösste Element $a * b$ von $T(a) \cap T(b)$. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingung bewiesen.

H. Wäsche, Lübeck

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (1914).
[2] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Bd. 1, (van Norstrand, Princeton, 1964).
[3] H. Wäsche, *Strukturtheoretische Analyse des Fundamentalsatzes der elementaren Zahlentheorie*. Der Mathematik-Unterricht XI, 5. (Klett-Verlag Stuttgart 1965).

[1]) Siehe [2] Ch. 4
[2]) $x \in M$ heisst (bzgl. $<$) maximales Element von $M(\subseteq H)$, wenn es kein $y \in M$ mit $x < y$ gibt.
[3]) Die Assoziativität dieser Verknüpfung ist wesentlich, siehe [3], S. 89.
[4]) Siehe [1], S. 79.
[5]) Siehe [1], Kap. VI, § 3.

On (m,n)-ideals in subcommutative semigroups

Let S be a semigroup[1]). Following the terminology of the theory of rings we say that S is *subcommutative* if in S the equation

$$a\,b = c\,a \tag{1}$$

always has a solution c given a and b. Obviously every commutative semigroup is subcommutative. We show by an example that there exists a subcommutative semigroup which is not commutative:

	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
2	2	2	2	2
3	2	3	2	3

The semigroup S of four elements 0, 1, 2, 3 with the above multiplication table is subcommutative but not commutative.

It is easy to see that the following assertion is true.

Proposition 1. *A semigroup S is subcommutative if and only if the relation $a\,S \subseteq S\,a$ holds for each element a in S.*

The Proposition 1 implies the

Proposition 2. *In a subcommutative semigroup S every left ideal is a two-sided ideal.*

As the author introduced (see e.g. [2]) a subsemigroup A of a semigroup S is called an (m,n)-*ideal* of S, if the inclusion

$$A^m\,S\,A^n \subseteq A \tag{2}$$

holds, where m,n are arbitrary non-negative integers and A^m is suppressed if $m = 0$. Concerning the (m,n)-ideals of semigroups the author proved, among others, that a semigroup is a group if and only if it has no proper (m,n)-ideals, where m,n are fixed positive integers [3]. Let π be a finite sequence $\pi_1, \ldots, \pi_t$ of the symbols l and r. A subsemigroup A of S is said to be a π-ideal if

$$A = S_t \subseteq S_{t-1} \subseteq \ldots \subseteq S_0 = S \tag{3}$$

holds, where S_i is a left [right] ideal of S_{i-1} if $\pi_i = l$ [r] ($i = 1, \ldots, t$). In the sequence π let $m[n]$ be the number of occurrences of $r[l]$. The author proved that *a subset A of a semigroup S is a π-ideal if and only if A is an (m,n)-ideal of S.* If S is a regular semigroup (i.e. $a \in a\,S\,a$ for each a in S), then a subset A of S is an (m,n)-ideal if and only if it is the intersection of an $(m,0)$-ideal and a $(0,n)$-ideal of S (see [2]).

In the theory of (m,n)-ideals the Proposition 2 may be easily generalized as follows.

Proposition 3. *In a subcommutative semigroup every (m,n)-ideal is at the same time an $(m+1, n-1)$-ideal.*

This statement has some consequences.

Corollary 1. *In a subcommutative semigroup every $(0,2)$-ideal is a bi-ideal.*

Corollary 2. *In a subcommutative semigroup every (m,n)-ideal is an $(m+n, 0)$-ideal.*

Corollary 3. *In a subcommutative semigroup every $(0,n)$-ideal is a (p,q)-ideal, where p,q are arbitrary non-negative integers such that $p + q = n$.*

It is easy to show that the subcommutative semigroups have the following property, too.

Proposition 4. *In a subcommutative semigroup every quasi-ideal is a right ideal and conversely.*

S. Lajos, Budapest, Hungary

[1]) For the terminology we refer to [1].

REFERENCES

[1] A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. 1 and 2 Amer. Math. Soc. (Providence R.I. 1961; 1967).

[2] S. LAJOS, *Generalized Ideals in Semigroups*, Acta Sci. Math. *22*, 217–222 (1961).

[3] S. LAJOS, *Notes on (m,n)-ideals* I–III, Proc. Japan Acad. *39*, 419–421 (1963); *40*, 631–632 (1964); *41*, 383–385 (1965).

A Note on Integral Domains that are not Right Distributive

The following are three well known or easily proven results about integral domains.

Theorem I: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain with characteristic $m > 0$, then m is a prime and all the non-zero elements in R have order m.*

Theorem II: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain and R is finite, then $(R, +, \cdot)$ is a division ring.*

Theorem III: *If $(R, +, \cdot)$ is an integral domain and $e \in R$ is a non-zero idempotent, then e is an identity for $(R, +, \cdot)$.*

It is the purpose of this note to show that analogous results can not be obtained if just one of the distributive laws hold in $(R, +, \cdot)$.

Recall that $(N, +, \cdot)$ is a *near-ring* if $(N, +)$ is a group (not necessarily abelian), if $(N, \cdot)$ is a semi-group, and if whenever $a, b, c \in N$, then $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. For lack of a better name, a *near integral domain* is a near-ring $(N, +, \cdot)$ such that if N^* are the non-zero elements of N, then $(N^*, \cdot)$ is a semi-group. Similarly, a near-field is a near-ring $(N, +, \cdot)$ such that $(N^*, \cdot)$ is a group.

The following result shows that analogues to Theorem I, Theorem II and Theorem III do not hold for near integral domains.

Theorem A: *Let $(G, +)$ be a group (not necessarily abelian). Let $*$ and $\cdot$ be binary operations defined on G as follows: $a * b = b$ for any pair $a, b \in G$; $a \cdot b = b$ for any pair $a, b \in G$ if $a \neq 0$, and $0 \cdot b = 0$ for any $b \in G$. Then $(G, +, \cdot)$ and $(G, +, *)$ are near integral domains.*

This result follows immediately from [2], or from Theorem 1.8 of [1], or it can easily be proven by the reader.

It is interesting to note that the two near integral domains defined in Theorem A are the only ones definable on $(Z_4, +)$, $(Z_6, +)$, and $(S_3, +)$ where $(Z_n, +)$ denotes the cyclic group of order n, and $(S_n, +)$ denotes the symmetric group on n letters, the operation written additively instead of the usual $\circ$ for composition. (These results are observed from Section II in [1].) For all other non-trivial groups of order less than eight there are additional near integral domains. Below are non-trivial examples for $(Z_5, +)$ and $(Z_7, +)$.

*	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	4	3	2	1
3	0	1	2	3	4
4	0	4	3	2	1

*	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	2	4	6	1	3	5
2	0	4	1	5	2	6	3
3	0	4	1	5	2	6	3
4	0	1	2	3	4	5	6
5	0	2	4	6	1	3	5
6	0	1	2	3	4	5	6

Based upon empirical evidence and efforts to show the contrary, the author makes the following

Conjecture. If $(N, +, \cdot)$ is a near integral domain with characteristic $m > 0$ and if $\cdot$ is not one of the two binary operations defined in Theorem A, then m is a prime.

JAMES R. CLAY, University of Arizona, Tucson, Arizona, U.S.A.

REFERENCES

[1] J. R. CLAY, *The Near-Rings on Groups of Low Order*, Math. Z. *104* (1968), 364–371.
[2] J. J. MALONE, Jr., *Near-Rings with Trivial Multiplications*, Amer. Math. Monthly *74* (1967). 1111–1112.

Aufgaben

Aufgabe 569. Gegeben sind ein Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit den Seitenflächen α_1, α_2, α_3, α_4 und ein Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ mit den Seitenflächen β_1, β_2, β_3, β_4. l_i ist die Senkrechte von A_i auf β_i, m_i die Senkrechte von B_i auf α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Man zeige: Wenn die Geraden l_i durch einen Punkt gehen, dann gehen auch die Geraden m_i durch einen Punkt.

O. BOTTEMA, Delft

Lösung: Der gemeinsame Punkt der Geraden l_i sei L. Das Tetraeder $B_1' B_2' B_3' B_4'$ sei zu $A_1 A_2 A_3 A_4$ polarreziprok inbezug auf eine Kugel mit Zentrum L. Da seine Flächen parallel zu $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ sind, ist es ähnlich und in ähnlicher Lage zum Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$. Die Lote von den Ecken B_i' $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf die Flächen α_i gehen durch einen Punkt (nämlich L); also gilt dasselbe von den zu ihnen parallelen (und damit in jener Ähnlichkeit homologen) Geraden m_i. (Die Aufgabe findet sich auch bei J. HADAMARD, Leçons de géométrie élémentaire, vol. II, 7 éd., Problème 559. In Problème 1215bis wird eine interessante Eigenschaft eines solchen Tetraederpaares angegeben.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

I. PAASCHE (München) zeigt, dass die entsprechende Aussage auch beim ebenen Simplex gilt.

Aufgabe 570. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels il existe seulement un nombre fini > 0 de nombres triangulaires qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution:

$$t_a + t_{a+1} + \cdots + t_{a+k-1} = \frac{1}{2}\left[k\,a^2 + k^2\,a + \frac{(k-1)\,k\,(k+1)}{3}\right].$$

Let $k\,[a^2 + k\,a + (k^2 - 1)/3] = m\,(m+1)$, therefore

$$(2\,m+1)^2 - k\,(2\,a+k)^2 = \frac{k^3 - 4\,k + 3}{3}.$$

Let k be an even perfect square $4\,t^2$, $t > 1$, that is not divisible by 3.

$$2\,m + 1 + 2\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = \frac{64\,t^6 - 16\,t^2 + 3}{3}, \qquad 2\,m + 1 - 2\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = 1$$

gives $4\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = (64\,t^6 - 16\,t^2)/3$ or $2\,a + 4\,t^2 = (16\,t^5 - 4\,t)/3$ hence $a = -2\,t^2 + (8\,t^5 - 2\,t)/3$ an integer. Further we have $4\,m = (64\,t^6 - 16\,t^2)/3$ or m is an integer. Hence there will be at least one solution and at most a finite number of solutions if k is so chosen.

G. WULCZYN, Bucknell University, USA

P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.) bewies die Aussage der Aufgabe für $k = 9\,(2\,t - 1)^2$ $(t = 1, 2, \ldots)$.