

Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 1

PDF erstellt am: **07.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

If $q > 1$, then $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$, $\sigma(q)$, $(2^{r+1} - 1)$ and 1 are distinct divisors of $(2^{r+1} - 1) \sigma(q)$, so that from (1), we have

$$2^{r+1} q \geq (2^{r+1} - 1) \sigma(q) + \sigma(q) + (2^{r+1} - 1) + 1 = 2^{r+1} (\sigma(q) + 1) > 2^{r+1} q,$$

a contradiction. Therefore $q = 1$, so that from (1), we have $2^{r+1} = \sigma(2^{r+1} - 1)$, which implies that $2^{r+1} - 1$ is a prime. Hence $n = 2^r$, where $2^{r+1} - 1$ is a prime. Thus the theorem is proved.

Problem. Are there odd super perfect numbers?

D. SURYANARAYANA, Waltair, India

Bemerkung zur Aufgabe 493

In den Anwendungen der Aufgabe [1] wurde gezeigt, dass die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt einem Vierscheitelsatz genügt.

Es sei nun P ein innerer Punkt eines Ovals K . Die polare Reziproke von K bezüglich des Einheitskreises mit dem Mittelpunkt P sei K^P . Wenn F den Flächeninhalt bezeichnet, so ist $F(K) F(K^P)$ eine affine Invariante [2]. Die Bestimmung des Minimums dieses Ausdrucks, d. h.

$$\min_K \min_{P \in K} F(K) F(K^P)$$

ist eine ungelöste Frage. Das Minimum ist allgemein $\geq 27/4$ (angenommen für ein Dreieck bezüglich seines Schwerpunkts) und ≥ 8 für ein symmetrisches Oval¹⁾. Die Stützfunktion von K , gemessen von P , sei $h(\theta)$. Hier ist θ der Stützwinkel. Dann ist $h^{-1}(\theta)$ der Radiusvektor von K^P als Funktion des Polarwinkels θ . SANTALÓ [2] hat bewiesen, dass $F(K) F(K^P)$ ein einziges Minimum in K hat und dass der entsprechende Punkt P durch

$$\int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \sin \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} h^{-3}(\theta) \cos \theta \, d\theta = 0$$

charakterisiert ist. Man überzeugt sich leicht, dass dies bedeutet, dass P der Schwerpunkt von K^P ist. Die letztere Bedingung definiert also einen einzigen Punkt in K .

Wenn K einen stetigen euklidischen Krümmungsradius $R(\theta)$ besitzt, so ist die unimodular zentro-affine Krümmung gleich $k(\theta) = (R h^3)^{-1} = h^{-3}/R$. Aus Aufgabe 493 folgt sofort: *Die unimodular zentro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Minimalpunkt von $F(K) F(K^P)$ genügt einem Vierscheitelsatz.*

(Research partially supported by NSF Grant GP-5760.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, Minneapolis, Minn.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Aufgabe 493, *El. Math.* 21, 17–18 (1966).
- [2] L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para las curvas convexas del plano*. *Matematicae Notae* 8, 103–111; L. A. SANTALÓ, *Un invariante afín para los cuerpos convexas del espacio de n dimensiones*, *Portugaliae Math.* 8, 155–161 (1949).

¹⁾ K. MAHLER, Ein Minimalproblem für konvexe Polygone, *Mathematica (Zutphen)* B. 7, 118–127 (1938/39). Diesen Hinweis verdanke ich Herrn Dr. E. Heil, Darmstadt.

Aufgaben

Aufgabe 564. Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich n Kugeln, die die Nummern 1, 2, ..., n tragen. Ein Spieler darf nach Entziehung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter r Kugeln sind, die beim s ten Zug die Nummer s trugen, erhält er den r -fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleich wahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Lösung: Der Erwartungswert des Gewinnes des Spielers ist gleich seinem Einsatz, den wir als 1 annehmen. Zum Beweis bedeute $f(s)$ die Anzahl derjenigen Permutationen von s Zahlen, bei denen keine einzige Zahl ihren ursprünglichen Platz beibehält. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler beim Ziehen der n Kugeln genau r mal die «richtige» Kugel genommen hat, ist offenbar

$$w(r) = \frac{1}{n!} \binom{n}{r} f(n-r). \quad (1)$$

Der Erwartungswert des Gewinnes ist

$$E = \sum_{r=0}^n r w(r) = \frac{1}{n!} \sum_{r=1}^n r \binom{n}{r} f(n-r). \quad (2)$$

Durch Abzählen aller Permutationen von $n-1$ Zahlen erhält man die Beziehung

$$(n-1)! = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{n-1-i} f(i)$$

oder

$$f(n-1) = (n-1)! - \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{n-1-i} f(i). \quad (3)$$

Setzt man (3) im ersten Summanden der Summe in (2) ein, so folgt wegen

$$\binom{n-1}{n-1-i} = \frac{n-i}{n} \binom{n}{n-i}$$

sofort $E = 1$.

H. MEILI, Winterthur

Weitere Lösungen sandten G. BACH (Braunschweig) und P. HOHLER (Dietikon).

Aufgabe 565. Man zeige, dass in einem orthonormierten Koordinatensystem die Gleichung

$$(x_1^2 - x_2 x_3)^2 + (x_2^2 - x_3 x_1)^2 + (x_3^2 - x_1 x_2)^2 = c^4$$

eine Drehfläche darstellt. Man bestimme die Drehachse und eine Meridiankurve.

L. KIEFFER, Luxemburg

1. *Lösung:* Die gemeinsamen Punkte $P(x_1, x_2, x_3)$ der gegebenen Fläche

$$F: \sum (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = c^4$$

und einer zur Geraden $g: x_1 = x_2 = x_3$ senkrechten Ebene $E: \sum x_i = 3t$ (Parameter t beliebig reell) bilden einen Kreis mit dem Mittelpunkt $M(t/t/t)$, dessen Radius r der Beziehung $3r^4 + 36t^2 r^2 = 4c^4$ genügt. Da dies für alle t gilt, ist F eine Drehfläche mit der Drehachse g .

Beweis: Es ist

$$\overline{MP}^2 = \sum (x_i - t)^2 = \sum x_i^2 - 2t \sum x_i + 3t^2 = \sum x_i^2 - 3t^2,$$

also

$$3\overline{MP}^4 + 36t^2 \overline{MP}^2 = 3(\sum x_i^2 - 3t^2)(\sum x_i^2 + 9t^2).$$

Wegen $\sum x_i = 3t$ ist $\sum x_i^2 + 2\sum x_i x_{i+1} = 9t^2$, somit

$$\sum x_i^2 - 3t^2 = (2/3)(\sum x_i^2 - \sum x_i x_{i+1}) \text{ und } \sum x_i^2 + 9t^2 = 2(\sum x_i^2 + \sum x_i x_{i+1}),$$

folglich

$$3\overline{MP}^4 + 36t^2 \overline{MP}^2 = 4\{(\sum x_i^2)^2 - (\sum x_i x_{i+1})^2\} = 4\sum (x_i^2 - x_{i+1} x_{i+2})^2 = 4c^4.$$

Bei festem t ist demnach $\overline{MP}$ konstant für alle $P \in E \cap F$, und es ist $M \in g \cap E$, womit obige Aussage bewiesen ist.

Aus $3r^4 + 36t^2 r^2 = 4c^4$ ist zu entnehmen, dass eine Meridiankurve vom Typus einer Konchoide ist; sie nähert sich für $|t| \rightarrow \infty$ asymptotisch der Drehachse g und nimmt für $t = 0$ ihren grössten Achsenabstand $c(4/3)^{1/4}$ an.

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. *Lösung*: Unter Beibehaltung der x_3 -Achse drehen wir die x_1 -Achse in die Halbierende des 1. Quadranten der $x_1 x_2$ -Ebene. Das neue System heiße XYZ . Bei fester Y -Achse drehen wir sodann die Z -Achse in die ursprüngliche Gerade $x_1 = x_2 = x_3$, die sich in der Bezeichnung z -Achse als Drehachse der Rotationsfläche erweisen wird. Das endgültige System heiße xyz . Insgesamt liegt jetzt vor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2/3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} - 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Flächengleichung lautet dann $4c^4 = 3(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 4z^2)$. Es liegt also wie angekündigt eine Drehfläche $z = f(x^2 + y^2)$ vor. Der Meridian $x = 0$ hat z. B. für $c^4 = 3/4$ die Gleichung $z = (1/2)\sqrt{y^2 - y^2}$.

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht) und K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 566. In einer Ebene, in der ein Kreis K und ein Punkt A gegeben sind, wird jedem Punkt P derjenige Punkt P' auf der Geraden AP zugeordnet, der zu P bezüglich K konjugiert ist. Man beweise: Fasst man alle Geraden der Ebene, die durch die Abbildung $P \rightarrow P'$ in zueinander ähnliche Kegelschnitte übergehen, in eine Schar zusammen, so sind die Enveloppen dieser Scharen konzentrische Kreise. Diejenigen Geraden, die in gleichseitige Hyperbeln übergehen, bilden das Büschel durch das gemeinsame Zentrum dieser Kreise.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Lösung: Der Bildpunkt P' des Punktes P der Geraden g ist der Schnittpunkt von AP mit der Polaren p von P . p läuft durch den Pol von g und steht senkrecht auf MP (M = Mittelpunkt von K). Die Geraden AP ($P \in g$) und die zugehörigen Polaren p bilden daher zwei projektive Strahlenbüschel mit dem Kegelschnitt g' (= Bild von g) als «Schnittkurve».

Die Ferngerade der Ebene wird auf den Thaleskreis T mit dem Durchmesser AM abgebildet. Wegen $(P')' = P$ sind die Urbilder der Fernpunkte von g' die (reellen oder komplexen) Schnittpunkte S_1, S_2 von g mit T . Die Bildpunkte S'_1, S'_2 liegen auf AS_1, AS_2 . Also ist $\sphericalangle S_1AS_2$ der «Winkel» zwischen den Fernpunkten von g' . Zwei Kegelschnitte sind ähnlich, wenn ihre Fernpunkte denselben (reellen oder komplexen) Winkel einschließen. $\sphericalangle S_1AS_2$ ist Peripheriewinkel auf dem Thaleskreis T . Es werden somit diejenigen Geraden als ähnliche Kegelschnitte abgebildet, die (nach dem Peripheriewinkelsatz) gleichlange Sehnen aus T ausschneiden, die also einen zu T konzentrischen Kreis einhüllen. (Im Fall gleichseitiger Hyperbeln ist $\sphericalangle S_1AS_2 = \pi/2$, d. h. S_1S_2 Durchmesser von T .)

W. VINZENZ, München

Weitere Lösungen sandten K. GRÜN (Linz/Donau) und L. KIEFFER (Luxemburg).

Aufgabe 567. Man beweise: Eine Zahl α ist genau dann rational, wenn die Zahlenfolge $\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \dots$ eine wenigstens dreigliedrige geometrische Teilfolge enthält.

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Lösung: Ist $\alpha = p/q$ (p und q natürliche Zahlen), so sind $\alpha, \alpha + p$ und $\alpha + 2p + pq$ in geometrischer Progression. Wenn α rational, aber nicht positiv ist, wende man das obige auf die positive rationale Zahl $\alpha - [\alpha] + 1$ an.

Sind umgekehrt $\alpha, \alpha + n$ und $\alpha + n + m$ in geometrischer Progression (n und m natürliche Zahlen), so ist $\alpha = n^2/(m - n)$ rational.

A. BAGER, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), P. HOHLER (Dietikon), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen).

Neue Aufgaben

Aufgabe 589. In einer Ebene sind drei Kreisbüschel gegeben. Man konstruiere drei zueinander orthogonale Kreise, von denen jeder einem dieser Büschel angehört.

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

Aufgabe 590. Gegeben sind die Ausdrücke

$$A_n = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{und} \quad B_n = \frac{2}{(n+1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}.$$

Man zeige $A_n = B_n = n$ für $n = 0, 1, 2, \dots$.

I. PAASCHE, München

Aufgabe 591. Für welche reellen Zahlen α gilt die Implikation

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \dots = \sum_{i=1}^n x_i^n = \alpha \Rightarrow (\forall r \in \mathbb{N}) \sum_{i=1}^n x_i^{n+r} = \alpha,$$

wobei x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) reelle Zahlen sind?

D. VELJAN, Zagreb

Aufgabe 592. Für $k = 1, 2, \dots$ bezeichne $(n, m)_k$ den grössten gemeinsamen Teiler von n und m der Potenz k , $\sigma_s(k, m)$ die Teilerfunktion

$$\sigma_s(k, m) = \sum_{t \mid d^{k-m}} t^s$$

und $c_n^{(k)}(m)$ die verallgemeinerte Ramanujansche Summe

$$c_n^{(k)}(m) = \sum_{\substack{1 \leq r \leq n^k \\ (r, n^k)_k = 1}} e^{2\pi i r m / n^k}.$$

Man beweise die für $R(s) > 1/k$ gültige Darstellung

$$\sigma_{s-1}(k, m) = \zeta(k, s) m^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^{(k)}(m)}{n^{ks}},$$

worin ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet.

E. KRÄTZEL, Jena

Literaturüberschau

Calculus of Fractions and Homotopy Theory. Von P. GABRIEL und M. ZISMAN. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. X und 168 Seiten mit 114 Figuren. DM 38.—. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg und New York 1967.

Dieses Buch vermittelt eine in sich abgeschlossene Darstellung der semisimplizialen Topologie. Es wird dabei durchweg ausführlicher Gebrauch der Kategoriensprache gemacht. Der Leser findet zu Beginn des Buches eine Zusammenstellung der fundamentalen Begriffe und Konstruktionen in der Kategorientheorie.

Hauptanliegen des Buches ist die Konstruktion der sogenannten homotopischen Kategorie H und ihre Beziehung zu andern wohlbekannten Kategorien. Insbesondere wird gezeigt, dass die Kategorie H äquivalent ist zur Kategorie der CW-Komplexe modulo Homotopie. Ausgangspunkt der Konstruktion von H ist die Kategorie $\Delta^0 E$ der semisimplizialen Mengen. In dieser wird eine Homotopie erklärt und in der entsprechenden Kategorie $\overline{\Delta^0 E}$ der semisimplizialen Mengen modulo Homotopie eine spezielle Klasse A von Morphismen ausgezeichnet. Geometrisch gesprochen ist A die Klasse derjenigen Morphismen in $\overline{\Delta^0 E}$, deren geometrische Realisierung invertierbar ist. Die homotopische Kategorie H geht nun aus $\overline{\Delta^0 E}$ dadurch hervor, dass die Morphismen der Klasse A formal