Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern

Autor(en): **Debrunner, H.E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26640

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 24 Heft 1 Seiten 1–24 10. Januar 1969

Zerlegungsähnlichkeit von Polyedern

Herrn HUGO HADWIGER in Dankbarkeit zum 60. Geburtstag gewidmet

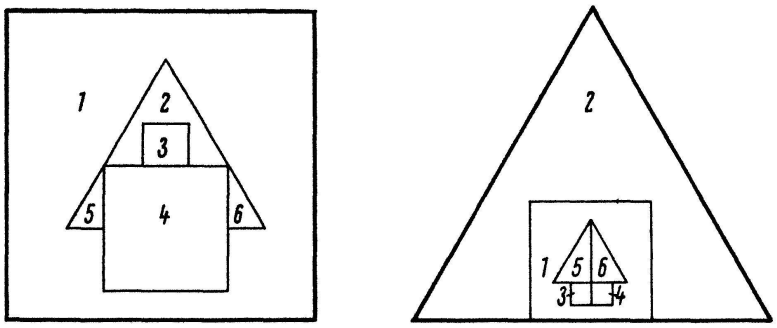
1. Übersicht

Die Zerlegung von Polyedern in polyedrische Teilstücke spielt in der Geometrie seit je eine wichtige Rolle. Aber erst im Zusammenhang mit einer kritischen Begründung der Inhaltslehre ist diese Operation selber Gegenstand mathematischer Überlegungen geworden. So hat auf HILBERTS Anregungen hin DEHN [1] zu Beginn dieses Jahrhunderts Ansätze zu einer Theorie der Polyederzerlegung geliefert, indem er notwendige Bedingungen für die Zerlegungsgleichheit von Polyedern herleitete und als deren spezielle Anwendung nachwies, dass ein reguläres Tetraeder mit keinem Würfel zerlegungsgleich ist. Diese Bedingungen sind, besonders durch SYDLER [3], erfolgreich weiteruntersucht und als hinreichend für Zerlegungsgleichheit nachgewiesen worden. Die speziellen Gegebenheiten überschreitend, hat HADWIGER eine Anschaulichkeit und Allgemeinheit in besonders glücklicher Weise verbindende Theorie der Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder bezüglich ausgewählter Bewegungsgruppen begründet. Ein m.W. bisher unbeachteter reizvoller Sachverhalt bei der Zerlegung zweier Polyeder in paarweise ähnliche Teilstücke schafft die Gelegenheit, die von HADWIGER entwickelten und in [2], Kap. 1 und 2, dargestellten Methoden soweit vereinfacht anzuwenden, dass unsere Darlegung für dreidimensionale Polyeder in sich abgeschlossen und ohne spezielle Vorkenntnisse verständlich ist, zugleich aber doch wesentliche Züge der Hadwigerschen Zerlegungstheorie zur Entfaltung bringt. Es handelt sich um die folgende, vorerst überraschende Bemerkung:

Satz: *Zwei beliebige Polyeder A bzw. B können stets so im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele Teilpolyeder $A_1, \ldots, A_n$ bzw. $B_1, \ldots, B_n$ zerlegt werden, dass diese paarweise, je A_i mit B_i für $i = 1, \ldots, n$, ähnlich und ähnlich gelegen sind.*

Dieser Sachverhalt gilt für eigentliche Polyeder des k-dimensionalen euklidischen Raumes. Den ebenen Fall $k = 2$ illustriert Figur 1 mit der Zerlegung eines Quadrats und eines parallel gelagerten gleichseitigen Dreiecks in je 6 paarweise ähnliche Stücke. Wir führen den Beweis des Satzes, um nicht weit ausholen zu müssen, nur für dreidimensionale Polyeder, doch überträgt er sich unter Verwendung der in [2], Kap. 1, § 3,

zusammengestellten Eigenschaften k-dimensionaler Polyeder ohne jede wesentliche Änderung auf den Fall von Dimensionen $k \neq 3$.



Figur 1

2. Zerlegungsähnlichkeit

Wir legen vorerst die Bezeichnungen fest und erinnen an einige in der Zerlegungstheorie nützliche Definitionen. Durchwegs betrachten wir Polyeder $A, B, \ldots$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes R^3, dessen Punkte wir mit ihren Ortsvektoren p bezüglich eines festgewählten Ursprungs identifizieren. Polyeder sollen als «Körper», nicht als Seitenflächen- und Kantengerüst aufgefasst werden, und sollen «eigentlich» sein, d.h. nur aus nicht entarteten Teilstücken bestehen. Als *Polyeder* bezeichnen wir demgemäss Punktmengen in R^3, welche sich als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener, nicht entarteter Tetraeder gewinnen lassen. Eine ausgezeichnete Rolle wird in unserm Zusammenhang der *Normwürfel* W spielen, das ist ein festgewählter Würfel von fixierter Kantenlänge und Position. Ist A ein Polyeder und t ein beliebiger Vektor des R^3, so erhalten wir durch $B = \{t + p \mid p \in A\}$ ein zu A *translationsgleiches* Polyeder. Der elementargeometrischen Zerlegung eines Polyeders in Teilpolyeder entsprechend führen wir eine kommutative und assoziative Summenbildung ein: sind $A_1, \ldots, A_n$ Polyeder, deren offene Kerne $A_1^0, \ldots, A_n^0$ paarweise disjunkt sind, so heisst die Vereinigungsmenge der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ *Summe* der A_i und wird mit $A_1 + \cdots + A_n$ bezeichnet; die Nebenbedingung bezüglich der offenen Kerne wird bei Verwendung der $+$-Schreibweise stets stillschweigend als erfüllt vorausgesetzt. Ist darüber hinaus jedes der Polyeder $A_1, \ldots, A_n$ zu einem festen Polyeder A translationsgleich, so schreiben wir auch $n \cdot A$ an Stelle von $A_1 + \cdots + A_n$; die genaue räumliche Lage der Teilpolyeder bleibt bei dieser Anschrift als im vorliegenden Zusammenhang belanglos dahingestellt, einzig die Nebenbedingung bezüglich der offenen Kerne wird wiederum als erfüllt vorausgesetzt. Von $n \cdot A$, der n-fachen Auslegung von A, ist die Schreibweise für das mit beliebigem reellen $\alpha > 0$ bildbare *dilatierte* Polyeder $\alpha A = \{\alpha p \mid p \in A\}$ zu unterscheiden.

Wir betrachten nun die Gruppe Γ_0 der Streckungen des Raumes von individuellen Zentren aus, also die Gruppe der Abbildungen φ: $R^3 \to R^3$, welche durch $\varphi(p) = \alpha p + a$ mit beliebig wählbaren $\alpha > 0$ und $a \in R^3$ gegeben sind. Die Gruppeneigenschaft ist leicht zu verifizieren. Für $\varphi \in \Gamma_0$ bezeichnet $\varphi(A) = \{\varphi(p) \mid p \in A\}$ ein zum Polyeder A *ähnliches und ähnlich gelegenes* Polyeder. Wir nennen zwei Polyeder A und B *zerlegungsähnlich*, geschrieben $A \sim B$, wenn es eine natürliche Zahl n, Polyeder $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ und in der Gruppe Γ_0 Abbildungen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ so gibt, dass $A = A_1 + \cdots + A_n$, $B = B_1 + \cdots + B_n$ und $B_i = \varphi_i(A_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Aus dieser Definition entnimmt man, dass die Zerlegungsähnlichkeit eine mit der Summenbildung verträgliche Äquivalenzrelation ist, so dass also folgendes gilt:

$$A \sim A; \quad \text{aus } A \sim B \text{ folgt } B \sim A; \quad \text{aus } A \sim B \text{ und } C \sim B \text{ folgt } A \sim C; \tag{1}$$

$$\text{aus } C_j \sim D_j \text{ für } j = 1, \ldots, m \text{ folgt } C_1 + \cdots + C_m \sim D_1 + \cdots + D_m, \tag{2}$$

und insbesondere

$$\text{aus } C \sim D \text{ folgt } m \cdot C \sim m \cdot D. \tag{2'}$$

Die Verifikation dieser nachfolgend ohne spezielle Verweisung verwendeten Beziehungen geht einzig für die Transitivität über die Substitution der Definitionsgleichung und die Berücksichtigung der Gruppeneigenschaft von Γ_0 hinaus: $A \sim B$, $C \sim B$ bedeutet $A = A_1 + \cdots + A_n$, $B = B_1 + \cdots + B_n = B_1' + \cdots + B_m'$ und $C = C_1' + \cdots + C_m'$ mit $B_i = \varphi_i(A_i)$ und $B_j = \psi_j(C_j')$; nach eventueller simultaner Weiterunterteilung darf man annehmen, alle beteiligten Stücke A_i, B_i, B_j' und C_j' seien konvex; man bilde nun die Polyeder $B_i \cap B_j'$, soweit sie nichtleer und nichtentartet sind, und setze $A_{ij} = \varphi_i^{-1}(B_i \cap B_j')$, $C_{ij}' = \psi_j^{-1}(B_i \cap B_j')$; dann ist A die Summe aller dieser A_{ij}, C die Summe aller dieser C_{ij}', und es gilt $C_{ij}' = \psi_j^{-1}\varphi_i(A_{ij})$, also $A \sim C$.

Da Γ_0 die Translationsgruppe umfasst, ist die Zerlegungsähnlichkeit eine Abschwächung der von HADWIGER eingehend untersuchten translativen Zerlegungsgleichheit $\approx$, bei welcher an die Stelle von Γ_0 die Translationsgruppe Γ tritt und für welche die Regeln (1) und (2) (mit $\approx$ anstatt $\sim$) genau gleich herleitbar sind. Wir vermerken diesen Sachverhalt symbolisch durch die Aussage

$$\text{aus } A \approx B \text{ folgt } A \sim B. \tag{3}$$

Anderseits enthält Γ_0 die Dilatationen, so dass

$$\alpha A \sim A \quad \text{für} \quad \alpha > 0 \tag{4}$$

gilt. Wir formulieren nun drei tieferliegende Eigenschaften der Zerlegungsähnlichkeit:

$$\text{aus } A + C \sim B + D \text{ und } C \sim D \text{ folgt } A \sim B \quad \text{(Subtraktionseigenschaft)}; \tag{5}$$

$$\text{aus } m \cdot A \sim W \text{ folgt } A \sim W \text{ (Divisionseigenschaft)}; \tag{6}$$

$$\text{es gilt } A \sim W \text{ für jedes Polyeder } A. \tag{7}$$

Die letzte Eigenschaft (7), in welcher W wie in (6) den Normwürfel bezeichnet, besagt in Verbindung mit der Transitivität, dass je zwei beliebige Polyeder zerlegungsähnlich sind. Die Richtigkeit des eingangs formulierten Satzes wird also mit dem im nächsten Abschnitt geführten Beweis für (5), (6) und (7) bestätigt sein.

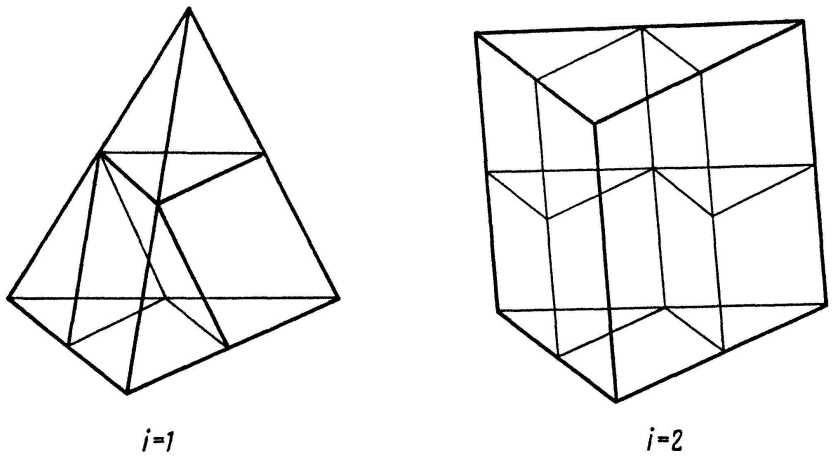
3. Beweisführung

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}_3$ die Menge aller Polyeder des R^3, welche sich als Summe endlich vieler Parallelotope darstellen lassen, mit $\mathfrak{P}_2$ die Menge aller Polyeder des R^3, welche sich als Summe endlich vieler Prismen mit dreieckigen Grundflächen darstellen lassen, und mit $\mathfrak{P}_1$ die Menge aller Polyeder, welche sich als Summe endlich vieler Tetraeder darstellen lassen. Die erwähnten Prismen dürfen schief sein, und zwischen den Grundflächenstellungen der verschiedenen Summanden braucht keine

Beziehung zu bestehen. Weil jedes Parallelotop in Prismen der genannten Art und jedes Prisma gleich wie jedes Polyeder in Tetraeder zerlegbar ist, gilt $\mathfrak{P}_3 \subset \mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{P}_1$, und $\mathfrak{P}_1$ ist die Menge aller Polyeder des R^3. Unserm Beweis liegt nun ein von HADWIGER in seiner Bedeutung erkannter Zusammenhang zwischen Dilatation und Zerlegung zugrunde, nämlich:

$$\text{Ist } m \text{ natürlich, } i \in \{1, 2\} \text{ und } A \in \mathfrak{P}_i, \text{ so gilt}$$
$$m\,A \approx m^i \cdot A + A_0 \text{ für passendes } A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}. \tag{8}$$

Die zwei Fälle $i = 1$ und $i = 2$ werden für $m = 2$ durch Figur 2 dargestellt. Da sich jedes $A \in \mathfrak{P}_i$ als Summe von Tetraedern bzw. Prismen mit dreieckiger Basis schreiben lässt, ergibt die analoge Figur für beliebiges natürliches m in Verbindung mit der (2) entsprechenden Relation für die translative Zerlegungsgleichheit den allgemeinen Nachweis für (8).



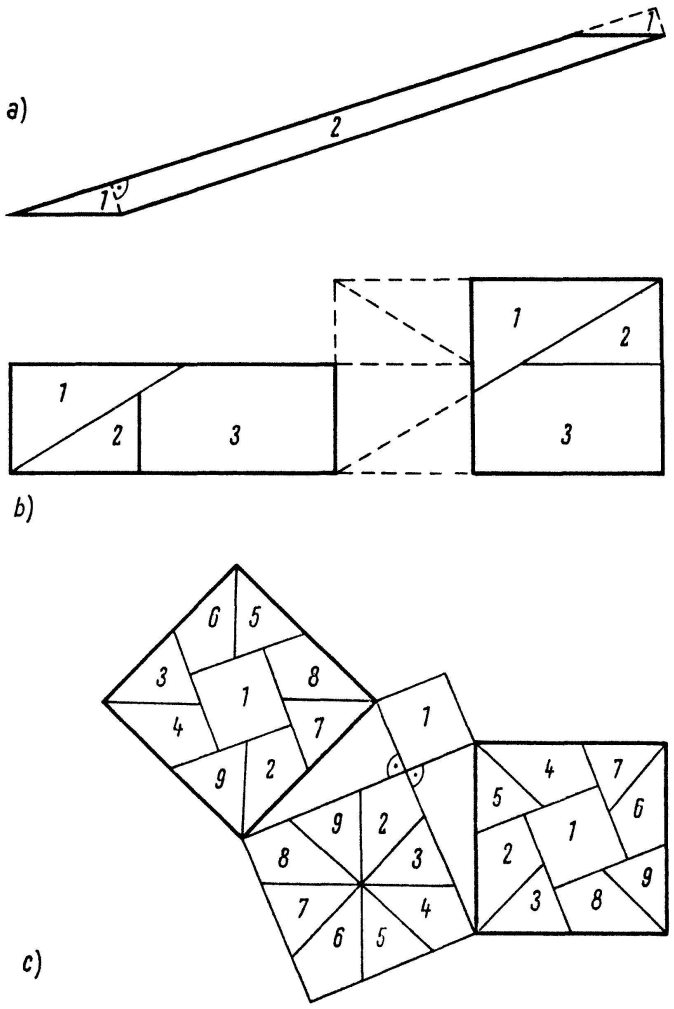
Figur 2

Wir führen nun die Beweise für (5), (6) und (7) durch Induktion nach abnehmendem i für den Fall $A, B \in \mathfrak{P}_i$.

Für $A, B \in \mathfrak{P}_3$ folgen alle drei Behauptungen aus der Aussage, dass jede Summe endlich vieler Parallelotope zum Normwürfel zerlegungsähnlich ist. An diesen wohlbekannten Sachverhalt erinnert Figur 3 durch die Darlegung der Methode, a) wie die Grundfläche eines Parallelotops in ihrer Ebene zu einem Rechteck, b) wie ein Rechteck mit Seitenverhältnis $1/4 < \lambda < 4$ mit einer an den Gnomonsatz anknüpfenden Zerlegung zu einem parallel gelagerten Quadrat und c) wie ein Quadrat mit einer an den bekannten Zerlegungsbeweis des pythagoräischen Lehrsatzes anschliessenden Konstruktion zu einem Quadrat vorgeschriebener Basisrichtung translativ zerlegungsgleich erwiesen wird. Durch iterierte Verwendung dieser Zerlegungen für Prismen über den gezeichneten Polygonen lassen sich, wie man sich leicht vollständig überlegt, Parallelotopsummen in Summen von parallel zum Normwürfel gelagerten Würfeln verwandeln, und unter anschliessender Beiziehung der Dilatation erweist sich jede solche Summe als mit einem Quader und dieser wiederum mit dem Normwürfel zerlegungsähnlich. Wir vermerken noch den nachfolgend stillschweigend verwendeten Spezialfall $m \cdot W \sim W$.

Nun nehmen wir induktiv an, es sei $i < 3$, für Polyeder $A, B \in \mathfrak{P}_{i+1}$ seien (5), (6) und (7) schon als richtig erwiesen, und gegeben seien jetzt Polyeder $A, B \in \mathfrak{P}_i$, welche die Voraussetzungen von (5), (6) bzw. (7) erfüllen.

Nachweis von (5): Es gilt a) $B \sim 2\,B \approx 2^i \cdot B + B_0$ für passendes $B_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$; entfernt man aus B_0 2^i genügend kleine, paarweise disjunkte, zu D ähnliche Polyeder und benennt das Restpolyeder mit Q, so wird dies formelmässig durch b) $B_0 \sim 2^i \cdot D + Q$ beschrieben. Substitution der Beziehung b) in a) gibt unter Berücksichtigung der Voraussetzung und der Induktionsannahme die Schlusskette c) $B \sim 2^i \cdot B + B_0 \sim 2^i \cdot B + 2^i \cdot D + Q \sim 2^i \cdot (B + D) + Q \sim 2^i \cdot (A + C) + Q \sim 2^i \cdot A + 2^i \cdot C + Q \sim 2^i \cdot A + 2^i \cdot D + Q \sim 2^i \cdot A + B_0 \sim 2^i \cdot A + W \sim 2^i \cdot A + A_0 \sim 2\,A \sim A$, wo $A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$ ein Polyeder ist, für welches $2\,A \approx 2^i \cdot A + A_0$ gilt. Da $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist, besagt c) auch $A \sim B$, wie behauptet.



Figur 3

Nachweis für (6): Aus $m \cdot A \sim W$ folgt mit (8) und mit der auf A_0 angewandten Induktionsvoraussetzung $A \sim m\,A \sim m^i \cdot A + A_0 \sim m^{i-1} \cdot (m \cdot A) + W \sim m^{i-1} \cdot W + W \sim W$, wie behauptet.

Nachweis für (7): Gilt $2\,A \approx 2^i \cdot A + A_0$ mit $A_0 \in \mathfrak{P}_{i+1}$ gemäss (8), so folgt mit der Induktionsvoraussetzung die Schlusskette $(2^i - 1) \cdot A + W + A \sim 2^i \cdot A + W \sim 2^i \cdot A + 3 \cdot W \sim 2^i \cdot A + A_0 + 2 \cdot W \sim 2\,A + 2 \cdot W \sim 2 \cdot W + A$. Mit den schon bewiesenen Eigenschaften (5) und (6) folgt bei Subtraktion von $W + A$ an beiden Enden dieser Kette vorerst $(2^i - 1) \cdot A \sim W$ und daraus $A \sim W$.

Nach zweimaliger Anwendung des Induktionsschrittes erhalten wir die Gültigkeit von (5), (6) und (7) für beliebige $A, B \in \mathfrak{P}_1$, also für beliebige Polyeder, womit die ausstehenden Beweise vollständig erbracht sind. H. E. DEBRUNNER, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] M. DEHN, *Über den Rauminhalt*, Math. Ann. *55*, 465–478 (1901); *Über Zerlegung von Rechtecken in Rechtecke*, Math. Ann. *57*, 314–332 (1903).
[2] H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, [Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. *43*], (Springer, Berlin 1957).
[3] J. P. SYDLER, *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'equivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions*, Comment. Math. Helv. *40*, 43–80 (1965).

A Theorem of BOBILLIER on the Tetrahedron

1. Almost one and a half centuries ago BOBILLIER [1] gave the following theorem: *any plane through the midpoints of two opposite edges of a tetrahedron divides it in two parts of equal volume.* This statement may be found in some texts for secondary schools and in books of higher level such as MOLENBROEK [2], HADAMARD [3], HOLZMÜLLER [4], ALTSHILLER-COURT [5] and the *Exercices* of F.G.M. [6]. The last two authors add a generalization on which we will return at the end of this paper.

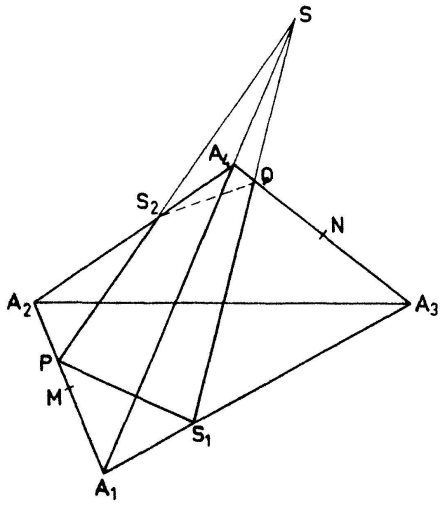


Figure 1

We consider (Fig. 1) an arbitrary transversal PQ of the opposite edges A_1A_2 and A_3A_4 of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ and study the ratio of the volumes of the two parts in which it is divided by a variable plane α through PQ. P is given by the ratio $A_1P:PA_2 = p$ and Q by $A_3Q:QA_4 = q$, so that $p > 0$, $q > 0$. Two sets of planes α have to be considered, one consisting of planes (such as in Fig. 1) which intersect the edges A_1A_3 and A_2A_4 in S_1 and S_2 respectively; the other set consists of planes having points of intersection S_1' and S_2' with A_1A_4 and A_2A_3. We consider for the time being the first set; a plane of this set is given by the position of S_1, that is by $A_1S_1:S_1A_3 = x$, $x \geq 0$.