Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 1

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Da $|M_\beta| = C$ und die rechtsgeschriebenen Mengen von einer Mächtigkeit $< C$ sind, muss so ein X_γ existieren. Wir definieren nun

$$V'_{\alpha\beta} = \bigcup_{\delta \leqq \alpha} T_\delta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \cup \{X'_\varepsilon\},$$

wo X'_ε das erste Element von M_β ist, das nicht zu $U_\alpha \cup \bigcup_{\delta < \beta} V_{\alpha\delta}$ gehört.

Wenn nun $S = \bigcup S_\alpha$, dann enthält für jedes Paar von Ordinalzahlen β, γ ($|\beta|, |\gamma| < C$) die Menge $(S - T_\beta(S)) \cap M_\gamma$ die Punkte von $V_{\alpha\gamma}$ für jedes $\alpha \geqslant \max\{\beta, \gamma\}$. Die Menge $S - T_\beta(S)$ ist also zusammenhängend und S ist überall dicht. Andererseits trifft die Komplementärmenge $S' = \bigcup S'_\alpha$ nach Konstruktion auch jedes M_γ, ist also sicher überall dicht.

Mit derselben Methode könnte man folgende Verallgemeinerung von Satz 2 beweisen:

Satz 2'. Es sei T eine Menge von eineindeutigen Abbildungen eines reellen Vektorraumes V der Dimension $\leqslant \aleph_0$ in sich, so dass $|T| \leqslant C$ und die Fixpunkte von weniger als C Abbildungen aus T den Raum nicht trennen. Dann gibt es eine Menge $S \subset V$, die zugleich mit ihrem Komplement überall dicht ist und die die F-Eigenschaft für T hat.

PAUL ERDÖS, Mathematisches Institut, Budapest und
E. G. STRAUS*), University of California, Los Angeles

LITERATUR

[1] L. FEJES-TÓTH, *Eine Kennzeichnung des Kreises*, El. Math. *21*, 25–27 (1967).
[2] H. KNESER, *Eine Erweiterung des Begriffes «konvexer Körper»*, Math. Ann. *82*, 287–296 (1921).

*) The work of the second author was supported in part by a grant from the National Science Foundation.

Ungelöste Probleme

Nr. 49. Es bezeichne R den dreidimensionalen euklidischen Raum, $Z \in R$ einen fest gewählten Ursprung und $A \subset R$ einen eigentlichen Eikörper, der den Ursprung enthält, so dass fortab stets $Z \in A$ vorausgesetzt ist. Bedeutet V das Volumen, so gilt offenbar $V(A) > 0$. Ferner bezeichne $E_u \subset R$ die durch Z hindurchgehende Ebene, deren Normalenrichtung durch den Einheitsvektor u gegeben ist. Schliesslich soll f den ebenen Flächeninhalt anzeigen, so dass $f(A \cap E_u)$ die Schnittfläche darstellt, welche die Ebene E_u aus dem Eikörper A ausschneidet.

Unser Interesse gilt den beiden durch die Ansätze

$$p = \sup_A \inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \tag{1}$$

$$q = \inf_A \sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \tag{2}$$

definierten Zahlwerten. Die Existenz von q ist trivial, diejenige von p ergibt sich weiter unten.

Das mit (1) angesetzte Problem in etwas anderer gleichwertiger Weise formuliert, lautet wie folgt:

Gesucht ist der grösste Wert, den der kleinste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen $V = 1$ hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.

Die Lösung dieses Problems ist einfach, und der mit (1) gefragte MaxMin-Wert p ist durch

$$p = 9\,\pi/16 \sim 1{,}767 \tag{3}$$

gegeben. Der Extremwert (3) stellt sich ein, wenn A eine Kugel mit Zentrum Z ist. Der Nachweis unserer Behauptung ergibt sich leicht mit einer integralgeometrischen Ungleichung von H. BUSEMANN[1]), wonach

$$\frac{1}{4\pi}\int [f(A \cap E_u)]^3\, d\,u \leqslant \frac{9\,\pi}{16}\, V(A)^2 \tag{4}$$

ist. Hierbei bezeichnet $d\,u$ die Richtungsdichte, also die linke Seite den über alle Richtungen u erstreckten Integralmittelwert der dritten Potenz der Schnittfläche von A mit E_u. Aus der Busemannschen Ungleichung (4) folgert man zunächst, dass

$$\inf_u\, [f(A \cap E_u)]^3\, [V(A)]^{-2} \leqslant 9\,\pi/16$$

sein muss, also damit erstens die Existenz von p und zweitens die Abschätzung $p \leqslant 9\pi/16$. Mit der Bemerkung, dass eine Kugel mit Zentrum Z das Gleichheitszeichen beansprucht, schliesst man auf (3).

Überraschenderweise scheint nun das mit (2) angeschnittene Problem schwieriger zu sein. Wenn über A keine zusätzliche Forderung gestellt wird, beispielsweise etwa die Voraussetzung, zentralsymmetrisch zu sein[2]), so ist sicher, dass hier nicht die Kugel extremal ist und dass der mit (2) erfragte MinMax-Wert q kleiner als $9\,\pi/16$ sein muss. Durch das unten erklärte Beispiel wird belegt, dass

$$q \leqslant 243/32\,\pi^2 \sim 0{,}769 \tag{5}$$

gilt. In der Tat: Wählt man für A einen geraden Kreiskegel mit Spitze Z, der Höhe $h = 1$ und mit Grundkreisradius $r = \sqrt{2}$, so folgt mit elementarer Diskussion zunächst $\sup_u f\,(A \cap E_u) = 3/2$ und $V(A) = 2\,\pi/3$, so dass also bei diesem speziellen Körper $\sup_u\, [f\,(A \cap E_u)]^3\, [V(A)]^{-2} = 243/32\,\pi^2$ und damit unsere Behauptung (5) resultiert.

Ungelöst bleibt unseres Wissens also das mit (2) eröffnete Problem, das wir wie oben bei (1) in gleichwertiger Weise etwas anders formulieren: *Gesucht ist der kleinste Wert, den der grösste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen $V = 1$ hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.*

Diese sprachliche Fassung unserer Frage unterstellt, dass die gesuchte Schranke auch angenommen wird und bei einem nichtkugelförmigen unbekannten Extremalkörper realisiert werden kann. Dies ist abzuklären.

H. HADWIGER

[1]) Unsere Ungleichung ist ein Spezialfall einer sehr allgemeinen Integralrelation, die sich auf $n - 1$ verschiedene Eikörper des n-dimensionalen Raumes bezieht. Vgl. H. BUSEMANN, Volume in Terms of Concurrent Cross Sections, Pac. J. Math. *3*, 1–12 (1953).

[2]) In diesem besonderen Fall, also für Mittelpunktseikörper, zeigt sich, dass $q = 9\,\pi/16$ dann gilt, wenn die mit dem Ungelösten Problem Nr. 44, El. Math. *17*, 84 (1962) dargelegte Busemannsche Ungleichheitsaussage zutrifft. Vgl. hierzu H. BUSEMANN und C. M. PETTY, Problems on Convex Bodies, Math. Scand. *4*, 88–94 (1956); insb. Problem 4.