

# Kleine Mitteilungen

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 6

PDF erstellt am: **23.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*  
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, [www.library.ethz.ch](http://www.library.ethz.ch)

<http://www.e-periodica.ch>

- [2] W. BLASCHKE, Über affine Geometrie III: *Eine Minimumeigenschaft der Ellipse*, Leipziger Berichte 69, 3–12 (1917).
- [3] B. A. DE VALCOURT, *Measures of Axial Symmetry for Ovals*, Israel Journal of Math. 4, 65–82 (1966).
- [4] H. G. EGGLESTON, *Convexity*, Cambridge 1963.
- [5] H. G. EGGLESTON, *On Triangles Circumscribing Plane Convex Sets*, J. London Math. Soc. 28, 36–46 (1953).
- [6] H. G. EGGLESTON, *Squares Contained in Plane Convex Sets*, Quart. Jour. Math., Oxford Series (2), 10, 261–269 (1959).
- [7] H. G. EGGLESTON and S. J. TAYLOR, *On the Size of Equilateral Triangles which may be inscribed in Curves of Constant Width*, J. London Math. Soc. 27, 438–448 (1952).
- [8] B. GRÜNBAUM, *Measures of Symmetry for Convex Sets*, Proc. of Symposia in Pure Mathematics, Vol. VII, Convexity; Am. Math. Soc., Providence, R.I. 1963.
- [9] H. HADWIGER, H. DEBRUNNER and V. KLEE, *Combinatorial Geometry in the Plane*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1964.
- [10] J. L. HODGES, *An Extremal Problem of Geometry*, J. Lond. Math. Soc. 26, 311–312 (1951).
- [11] W. NOHL, *Die innere axiale Symmetrie zentrischer Eibereiche der euklidischen Ebene*, El. Math. 17, 59–63 (1962).
- [12] K. RADZISZEWSKI, *Sur un problème extrémal relatif aux figures inscrites et circonscrites aux figures convexes*, C. r. Acad. Sci. Paris 235, 771–773 (1952).
- [13] I. M. YAGLOM and V. G. BOLTYANSKIJ, *Convex Figures* (translated by PAUL J. KELLY and LEWIS F. WALTON), Holt, Rinehart and Winston, New York 1961.
- [14] K. ZINDLER, *Über konvexe Gebilde, I, II, III*, Mh. Math. Phys. 30, 87–102 (1920); 31, 25–56 (1921); 32, 107–138 (1922).

## Kleine Mitteilungen

### Bestimmung einer oberen Schranke für den Inhalt des Parallelrisses eines regelmässigen Körpers

1. Im dreidimensionalen euklidischen Raum  $E_3$  gibt es bekanntlich fünf regelmässige, konvexe oder PLATONISCHE Körper. Ist  $s$  eine beliebige Sehstrahlrichtung und  $\pi$  eine zu  $s$  normale Bildebene, so ist der scheinbare Umriss eines solchen PLATONISCHEN Körpers  $\Pi$  ein ebenes konvexes Polygon  $\Pi^n$ , das im folgenden kurz als der Normalriss von  $\Pi$  bezeichnet werden soll;  $F$  sei sein Flächeninhalt. Das PLATONISCHE Polyeder  $\Pi$  habe  $p$  (untereinander kongruente und regelmässige) Polygone zu Seitenflächen  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), die alle denselben Flächeninhalt  $f$  besitzen. Ist  $\varepsilon_i$  die Trägerebene von  $s_i$  und  $\alpha_i$  der Neigungswinkel von  $\varepsilon_i$  gegen die Bildebene  $\pi$ , so hat der Normalriss  $s_i^n$  von  $s_i$  einen durch

$$f_i = f \cos \alpha_i \quad (1)$$

gegebenen Flächeninhalt. Da jeder Sehstrahl  $s$ , der mit dem konvexen Polyeder  $\Pi$  innere Punkte gemeinsam hat, den Rand  $\mathfrak{R}(\Pi)$  von  $\Pi$  in genau zwei Punkten trifft, ist jeder innere Punkt des Normalrisses  $\Pi^n$  von  $\Pi$  Normalriss von genau zwei Punkten des Randes  $\mathfrak{R}(\Pi)$  von  $\Pi$  und es gilt mithin für den Flächeninhalt  $F$  von  $\Pi^n$ :

$$2 F = \sum_{i=1}^p f_i. \quad (2)$$

Ist  $O$  der Mittelpunkt des PLATONISCHEN Körpers und  $O_i$  der Mittelpunkt seiner Seitenfläche  $s_i$ , so ordnen wir jeder Seitenfläche  $s_i$  einen zum Vektor  $\overrightarrow{OO_i}$  proportionalen Vektor  $m_i$  zu, dessen Betrag mit dem Inhalt  $f$  von  $s_i$  übereinstimmt. Jeder Vektor  $m_i$  steht somit auf der Trägerebene  $\varepsilon_i$  von  $s_i$  normal; die Spitzen der Vektoren  $m_i$  bestimmen in ihrer Gesamtheit als von  $O$  ausgehende Ortsvektoren ein zu dem gegebenen PLATONISCHEN Polyeder  $\Pi$  «duales» regelmässiges Polyeder.

Die Bestimmung einer oberen Schranke für den Flächeninhalt  $F$  der Normalprojektion  $\Pi^n$  von  $\Pi$  gründen wir auf die folgenden Bemerkungen:

- a) Die Normalprojektion jedes Vektors  $m_i$  auf einen Sehstrahl  $s$  hat die Länge  $f_i$ .  
 b) Das Vektorsystem  $\{m_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  hat als System der vom Mittelpunkt  $O$  eines regelmässigen Polyeders zu dessen Eckpunkten weisenden Ortsvektoren die Eigenschaft  $\mathfrak{B}$ , d. h. die Quadratsumme ihrer Normalprojektionen auf eine Gerade  $g$  des  $E_3$  hängt nicht von der Richtung der Geraden  $g$  ab (vgl. hierzu [1] und für das regelmässige Tetraeder auch [2] und W. JÄNICHEM [3] und [4]).

Sind  $h_1, h_2$  und  $h_3$  drei paarweise orthogonale Geraden des  $E_3$  und ist  $Q$  der auf jeder dieser Geraden  $h_i$  bestimmte Wert der Quadratsumme der Normalprojektionen der Vektoren  $\{m_i\}$ , so gilt

$$3Q = \sum_{i=1}^p m_i^2 = p f^2, \quad \text{also} \quad Q = \sum_{i=1}^p f_i^2 = \frac{p}{3} f^2. \quad (3)$$

Da die Funktion  $y = x^2$  nach unten konvex ist, gilt die JENSENSCHE Ungleichung in der Form (vgl. hierzu [5]):

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (4)$$

mit Gleichheit nur für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ . Aus den Ungleichungen (2) und (3) folgt nun für den Inhalt  $F$  des Normalrisses  $\Pi^n$  von  $\Pi$ :

$$F \leq \frac{p}{2\sqrt{3}} f, \quad (5)$$

wobei Gleichheit nur für  $f_1 = f_2 = \dots = f_p$  gilt, d. h. wenn alle Trägerebenen  $\varepsilon_i$  der Seitenflächen  $s_i$  gegen die Sehstrahlrichtung  $s$  gleich geneigt sind. Somit erhalten wir

**Satz 1.** *Ist  $\Pi$  ein PLATONISCHER Körper des dreidimensionalen euklidischen Raumes  $E_3$  mit  $p$  Seitenflächen vom Flächeninhalt  $f$ , so gilt für den Inhalt  $F$  seines Normalrisses  $\Pi^n$  stets die Ungleichung*

$$F \leq \frac{p}{2\sqrt{3}} f,$$

wobei Gleichheit dann und nur dann gilt, wenn die Trägerebenen der Seitenflächen  $s_i$  von  $\Pi$  gegen die Sehstrahlrichtung gleich geneigt sind.

2. An Satz 1 schliessen wir noch folgende Bemerkungen an:

- a) Für ein regelmässiges Tetraeder kann Gleichheit nur dann gelten, wenn die Sehstrahlrichtung zum Gemeinlot eines Paares windschiefer Gegenkanten parallel ist. Der Normalriss  $\Pi^n$  von  $\Pi$  ist dann ein Quadrat, dessen Diagonalen von den Normalrissen der zur Bildebene parallelen Kanten des Tetraeders gebildet werden. Es gilt daher stets die Ungleichung

$$F_{\text{Tetraeder}} \leq \frac{1}{2} k^2, \quad (6)$$

wobei  $k$  die Länge der Tetraederkante bedeutet.

- b) Für einen Würfel, dessen Seitenkante die Länge  $k$  hat, gilt in (5) Gleichheit genau dann, wenn die Sehstrahlrichtung zu einer Raumdiagonale des Würfels parallel ist; der Normalriss des Würfels ist dann ein regelmässiges Sechseck. Es gilt daher stets die Ungleichung

$$F_{\text{Würfel}} \leq \sqrt{3} k^2. \quad (7)$$

- c) Für ein regelmässiges Oktaeder, dessen Seitenkanten die Länge  $k$  haben, gilt in (5) Gleichheit dann und nur dann, wenn die Sehstrahlrichtung zu einer Raumdiagonale des Oktaeders parallel ist. Der Normalriss ist dann ein Quadrat und es gilt:

$$F_{\text{Oktaeder}} \leq k^2. \quad (8)$$

d) Bei einem (Pentagon-) Dodekaeder und einem regelmässigen Ikosaeder kann in Ungleichung (5) die obere Schranke nicht angenommen werden, da es keine Sehstrahlrichtung gibt, die zu allen Seitenflächen gleich geneigt ist.

e) Der Fall des Schrägrisses kann auf den Normalriss zurückgeführt werden; ist nämlich für eine Sehstrahlrichtung  $s$  der Inhalt  $F$  des Normalrisses  $\Pi^n$  eines konvexen Polyeders  $\Pi$ , so gilt für den Inhalt  $F^*$  des Schrägrisses  $\Pi^s$  von  $\Pi$ :

$$F^* \cos\left(\nu - \frac{\pi}{2}\right) = F \quad (9)$$

wobei  $\nu$  den Neigungswinkel der Sehstrahlrichtung gegen die Bildebene des Schrägrisses bedeutet. Somit gilt

Satz 2. Ist  $\Pi$  ein PLATONISCHER Körper mit  $p$  Seitenflächen, die den Inhalt  $f$  besitzen, so gilt für den Inhalt  $F$  seines Schrägrisses stets

$$F^* \leq \frac{p f}{2\sqrt{3} \sin \nu}, \quad (10)$$

wobei  $\nu$  den Neigungswinkel der Sehstrahlen gegen die Bildebene bezeichnet. Gleichheit gilt genau dann, wenn alle Seitenflächen des PLATONISCHEN Körpers zu den Sehstrahlen gleich geneigt sind.

f) Das hier durchgeführte Verfahren kann zwanglos auf den  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $E_n$  übertragen werden, um für die regelmässigen Polytope des  $E_n$  den Inhalt ihrer Parallelrisse auf einen  $(n-1)$ -dimensionalen linearen Unterraum nach oben abzuschätzen. Dies soll jedoch – ebenso wie die entsprechende Abschätzung nach unten – einer weiteren Note vorbehalten bleiben.

HANS VOGLER, Wien

#### LITERATUR

- [1] H. VOGLER, *Über die Normalprojektionen von Vektorsystemen im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum*, Sber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat., II, 173, 299–329 (1965).
- [2] H. VOGLER, *Über die Normalprojektionen des Simplex eines  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes*, Sber. Akad. Wiss. Wien, mat.-nat., II, 173, 29–57 (1964).
- [3] W. JÄNICHEN, *Aufgabe Nr. 458*, *El. Math.* 18, 92 (1963).
- [4] W. JÄNICHEN, *Über ein Tetraederproblem*, *El. Math.* 19, 83–87 (1964).
- [5] J. L. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, *Acta Mathematica* 30, 175–193 (1906).

### Einfacher Beweis und Verallgemeinerung einer Dreiecksungleichung

*Einleitung.* Es sei  $P$  ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande eines Dreiecks  $A_1A_2A_3$ . Wir bezeichnen mit  $R_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) den Abstand  $PA_i$ , mit  $r_i$  den Abstand der Seiten  $A_{i+1}A_{i+2}$  von  $P$ , mit  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Höhen und mit  $r$  den Radius des Inkreises. Bekannt sind die drei folgenden Ungleichungen

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3) \quad (1)$$

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 6r \quad (2)$$

$$h_1 + h_2 + h_3 \geq 9r \quad (3)$$

(1) ist die berühmte ERDÖS-MORDELLSche Ungleichung [1]; (2) stammt von M. SCHREIBER [2]; (3) findet man bei LEUENBERGER [3]. Wir untersuchen die Zusammenhänge zwischen den Ungleichungen (1) und (3) und die Verallgemeinerungen dieser Ungleichungen im  $n$ -dimensionalen Raum  $E^n$ .

Satz I. Die Ungleichung (2) folgt aus (1) und (3) auf elementare Weise.

*Beweis.* Bedeutet  $A(x_i)$  das arithmetische Mittel der Grössen  $x_i$  ( $x_i > 0$ ;  $i = 1, 2, 3$ ), so gilt:

$$3r \leq A(h_i) \leq A(R_i + r_i) = A(R_i) + A(r_i) \leq A(R_i) + 0,5 A(R_i) = 1,5 A(R_i)$$

Nun betrachten wir die Verallgemeinerungen für den  $n$ -dimensionalen Raum  $E^n$ !

Es bedeute jetzt  $R_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) den Abstand  $PA_i$ , wo  $P$  ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande des  $n$ -dimensionalen Simplex  $A_0A_1A_2 \dots A_n$  ist;  $r$  und  $h_i$  haben dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung (Inkugelradius und Höhen);  $V$  ist der Inhalt des Simplex.

Bekannt ist die Verallgemeinerung von (3) auf  $E^n$  [4]. Jetzt beweisen wir:

*Satz II.* Es gilt folgende Verallgemeinerung von (2) auf den  $E^n$ :

$$R_0 + R_1 + R_2 + \dots + R_n \geq (n+1)nr. \quad (2^*)$$

*Beweis.* Die Ungleichung von PETTY und WATERMAN lautet [5]:

$$\sum_{i=0}^n R_i \geq (n+1)^{(n-1)/2n} (n!)^{1/n} V^{1/n} \sqrt{n}. \quad (I)$$

Andererseits findet man bei L. FEJES TÓTH auch eine Simplexungleichung [6]:

$$V \geq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} n^{n/2} r^n. \quad (II)$$

Wenden wir die Substitution von (II) in der Ungleichung (I) an, so ergibt sich:

$$A(R_i) = \frac{\sum_{i=0}^n R_i}{n+1} \geq nr.$$

Für  $n = 3$  lautet die Ungleichung:

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r.$$

*Bemerkungen.* Die vollständige Verallgemeinerung von (1) für  $n = 3$  ist noch nicht bekannt. Vielleicht geben eine Arbeit von J. STEINIG [6] und diese Arbeit gewisse Stützpunkte in dieser Richtung.

Der Verfasser dankt Herrn J. STEINIG für nützliche Bemerkungen.

J. BERKES, Szeged

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] MORDELL, L. J., *Lösung der Aufgabe 3740 von P. Erdős*, Amer. Math. Monthly 44, 252 (1937).
- [2] M. SCHREIBER, *Aufgabe 196*, Jber. dtsch. Math.-Ver. 45 (1935).
- [3] F. LEUENBERGER, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. 13, 121–126 (1958).
- [4] F. LEUENBERGER, *Extremaleigenschaften der wichtigsten Ecktransversalen des  $n$ -dimensionalen Simplex*, El. Math. 15, 81–82 (1960).
- [5] PETTY und WATERMAN, *An Extremal Theorem for  $N$ -Simplexes*, Monatshefte Math. 59, 320–322 (1955).
- [6] J. STEINIG, *A Comparison of Two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 16, 19–22 (1965).

## Aufgaben

**Aufgabe 537.** Ein gegebener Kreis  $K$  wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen  $K_1, K_2$ , die durch einen festen Punkt  $F$  seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von  $K_1$  und  $K_2$ ?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* Durch eine Inversion mit Zentrum  $F$ , die  $K$  in sich überführt, gehen  $K_1$  und  $K_2$  in zwei zueinander senkrechte Tangenten  $K'_1, K'_2$  über. Dem