

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 6

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Abbildung  $a^\sigma\{e'\} \rightarrow a^\sigma$  mit  $G^\sigma$  kanonisch isomorph. Durch Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen erhält man  $a N \rightarrow a^\sigma$  als den kanonischen Isomorphismus von  $G/N$  auf  $G^\sigma$ .

Setzt man aber den Homomorphiesatz als bekannt voraus, so folgt der allgemeine Satz daraus relativ schnell, indem man  $LK$  als den Kern des Homomorphismus  $a \rightarrow a^\sigma L^\sigma M$  ( $a \in G$ ) von  $G$  auf  $G^\sigma M/L^\sigma M$  erkennt.

*Korollar 2 (Erster Isomorphiesatz, [1], S. 150)*

Es seien  $G$  eine Gruppe,  $N$  ein Normalteiler von  $G$  und  $H$  eine beliebige Untergruppe von  $G$ . Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$H/H \cap N \cong HN/N.$$

*Beweis.* In der Bezeichnung des Satzes sei  $G := H$ ,  $G' := G$  und es sei  $\sigma: H \rightarrow G$  die natürliche Injektion d.h.  $a^\sigma = a$  für jedes  $a \in H$ . Man setze weiter  $M := N$ ,  $L := \{e\}$ . Dann ist offenbar  $K = \sigma^{-1}(N) = H \cap N$  und  $G^\sigma M = HN$ ,  $LK = H \cap N$ ,  $L^\sigma M = N$ . Die Behauptung folgt somit aus dem Satz; der kanonische Isomorphismus ist dabei

$$a H \cap N \rightarrow a N, \quad a \in H.$$

*Korollar 3 (Zweiter Isomorphiesatz, [1], S. 151)*

Es seien  $G$  eine Gruppe und  $H, N$  zwei Normalteiler von  $G$  mit  $H \supset N$ . Dann ist  $H/N$  ein Normalteiler in  $G/N$  und es besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/H \cong (G/N)/(H/N).$$

*Beweis.* Dass  $H/N$  ein Normalteiler in  $G/N$  ist, ist klar. Man setze  $G' := G/N$  und wähle als  $\sigma: G \rightarrow G/N$  den natürlichen Homomorphismus  $a \rightarrow a N$  von  $G$  auf  $G/N$ . Sodann sei  $M := H/N$ ,  $L := \{e\}$ . Dann ist offenbar  $K = \sigma^{-1}(H/N) = H$ ,  $LK = H$ ,  $L^\sigma M = H/N$  und  $G^\sigma M = (G/N)(H/N) = G/N$ ; damit folgt die Behauptung aus dem Satz.

M. R. CHOWDHURY, Göttingen

#### LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, Teil I, 5. Auflage, Springer-Verlag 1960.

## Aufgaben

**Aufgabe 513.** If

$$N = \frac{x^2 - 6xy + y^2}{x^2 - 10xy + y^2},$$

where  $x, y$  are integers not both zero,  $N$  a positive integer, then  $N$  is representable in the forms

$$s^2 + (s+1)^2 \text{ and } 2r^2 + (r \pm 1)^2.$$

M. N. KHATRI, Bhilupur/India, A. MAKOWSKI, Warszawa/Poland

*Solution:* Rewrite the equation

$$N(x^2 - 10xy + y^2) = x^2 - 6xy + y^2 \tag{1}$$

in the form

$$(N-1)x^2 - 2(5N-3)xy + (N-1)y^2 = 0.$$

The latter equation has non-trivial solutions  $x, y$  provided

$$(5N-3)^2 - (N-1)^2 = m^2,$$

where  $m$  is an integer. Clearly  $m$  is even and we get

$$6 N^2 - 7 N + 2 = (2 N - 1) (3 N - 2) = M^2,$$

where  $M$  is an integer. Clearly  $2 N - 1$  and  $3 N - 2$  are relatively prime. Hence

$$2 N - 1 = (2 s + 1)^2, \quad 3 N - 2 = (3 r \pm 1)^2, \quad (2)$$

where  $r, s$  are integers. The first equation implies  $N = s^2 + (s + 1)^2$ , the second  $N = 2 r^2 + (r \pm 1)^2$ .

*Remark:* Conversely, if

$$N = s^2 + (s + 1)^2 = 2 r^2 + (r \pm 1)^2,$$

where  $r$  and  $s$  are integers, then (2) follows and  $(2 N - 1) (3 N - 2) = M^2$ , where  $M$  is an integer. It follows, that (1) is solvable in integers  $x, y$  not both zero.

L. CARLITZ, Duke University, USA

G. BACH (Braunschweig) berechnet die Lösungstriplet  $N_t, x_t, y_t$  mit  $(x_t, y_t) = 1$  durch die Formeln:

$$N_t = \{(5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} + (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1} + 14\}/24,$$

$$y_t : x_t = \{(10 N_t - 6) \sqrt{6} + (5 + 2\sqrt{6})^{2t+1} - (5 - 2\sqrt{6})^{2t+1}\} : 2 (N_t - 1) \sqrt{6},$$

$$(y_t, x_t) = 1, t = 1, 2, 3, \dots \text{ Beispiel: } N_1 = 41, x_1 = 1, y_1 = 10.$$

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.), H. GAEBELEIN (Helmstedt), H. HARBORTH (Braunschweig), W. JÄNICHEN (Berlin), I. PAASCHE (Stockdorf, Lkr. Starnberg).

**Aufgabe 514.** Gegeben sei ein Kreis  $k$  und auf  $k$  ein Punkt  $S$ . Man ermittle jene kubische Parabel  $p$ , vom Typus  $a^2 y = x^3$ , von der  $S$  ein Scheitel und  $k$  der zugehörige Schmiegekreis ist.

R. BEREIS, Dresden

*Lösung und Verallgemeinerung;* Sei  $a = 1$  und  $M = X + i Y$  der Mittelpunkt sowie  $r = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$  der Radius des Krümmungskreises  $k$  im Punkt  $S = x + i y$  einer Kurve  $p$  mit der Gleichung  $y = y(x)$ .  $S$  ist genau für extremes  $r$  Scheitel, also für

$$3 y' y''^2 = (1 + y'^2) y''' \text{ und } r_{extr.} = (3 y'/y''')^{3/2} y''^2.$$

Das zugehörige  $M$  hat

$$X = x - y' (1 + y'^2)/y'' = x - 3 y'^2 y''/y''' \text{ und } Y = y + (1 + y'^2)/y'' = y + 3 y' y''/y'''.$$

Im Falle  $y; y'; y''; y''' = x^n; n x^{n-1}; n(n-1) x^{n-2}; n(n-1)(n-2) x^{n-3}$  liegt der Scheitel  $S$  also auf der Geraden  $y = x\sqrt{n-2}/n\sqrt{2n-1}$ . Die Tangente in diesem Scheitel  $S = x + i y = x + i x^n$  hat die Richtung  $y' = n y/x = \sqrt{n-2}/\sqrt{2n-1}$ . Der Mittelpunkt  $M$  des Scheitelkrümmungskreises  $k$  hat

$$X = x - 3 n^2 y^2/(n-2) x \text{ und } Y = y + 3 n y/(n-2) = 2 y (2 n - 1)/(n - 2).$$

Der Radius von  $k$  ist  $r = 3\sqrt{3} n^2 (n-1)^{1/2} y^2/x (n-2)^{3/2}$ . Die Gerade  $SM$  hat den Abszissenabschnitt  $u = x + n y^2/x$  und den Ordinatenabschnitt  $v = y + x^2/n y$ .

Im Spezialfall  $n = 3$ , wo  $p$  die Kurve  $y = x^3$  ist, kann  $p$  z.B. im Quadrat mit Ecken  $0, 1, 1 + i, i$  gut approximiert werden, weil die 3 Kurvenpunkte  $0; S; 1 + i$  die Tangentenrichtungen  $y' = 0; 1/\sqrt{5}; 3$  besitzen und im Scheitel  $S$  der Krümmungskreis  $k$  bekannt ist: Verlängert man  $MS = r$  über  $S$  hinaus um  $r/9$  bis  $T$  und über  $M$  hinaus um  $2r/3$  bis  $P$ , so liegt  $T$  auf der  $x$ -Achse und  $P$  auf der  $y$ -Achse. Den Ursprung  $O$  findet man wegen  $TO:OP:PT = 1:\sqrt{5}:\sqrt{6}$  durch eine Ähnlichkeitskonstruktion. Die Quadratische 1 und  $1 + i$  konstruiert man auf Grund von  $r = 3\sqrt{2}/5\sqrt{5}$ .

I. PAASCHE, München

Eine weitere Lösung sandte H. MEILI (Winterthur).

**Aufgabe 515.** Es sei  $\mathfrak{C}$  ein «einfacher» Kurvenbogen (die Tangente ist in jedem Punkt von  $\mathfrak{C}$  eindeutig und variiert kontinuierlich und monoton). Das von einer beweglichen Sehne  $s$  abgeschnittene Segment habe die Fläche  $S$  und  $T$  sei die Fläche des von  $s$  und den Tangenten in den Endpunkten von  $s$  gebildeten Dreiecks. Man zeige, dass die Parabelbogen die einzigen  $\mathfrak{C}$  sind, für die  $S/T$  einen konstanten Wert hat. E. W. STEIN, Graz

*Lösung:* In einem rechtwinkligen  $x, f$ -Koordinatensystem habe  $\mathfrak{C}$  die Endpunkte  $A(0; 1)$  und  $B(1; 0)$ , und die Tangenten in diesen Punkten seien die Koordinatenachsen mit Schnittpunkt  $O(0; 0)$ . Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil jeder beliebige einfache Kurvenbogen durch eine geeignete affine Abbildung in einen solchen mit vorgeschriebenen Endpunkten samt Richtungen abgebildet werden kann, und Flächeninhaltsverhältnisse gegenüber dieser Abbildung invariant sind.

$\mathfrak{C}$  wird dann durch eine in  $I = (0 < x < 1)$  zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f(x)$  dargestellt, welche die Randbedingungen  $\lim_{x \rightarrow 0} f = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f' = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1} f' = 0$  erfüllt, und wegen der monotonen Richtungsänderung der Tangente ist  $f'(x)$  in  $I$  monoton wachsend und ständig negativ. Die Tangente in einem beliebigen Punkt  $P(x; f)$  von  $\mathfrak{C}$  ( $x \in I$ ) schneidet die Tangente  $AO$  in  $Q(0; f - x f')$  und die Tangente  $BO$  in  $R(x - f/f'; 0)$ . Demnach hat das Dreieck  $AQP$  den Inhalt  $T = x(1 - f + x f')/2$ , und das Segment mit den Endpunkten  $A$  und  $P$  den Inhalt  $S = x(1 + f)/2 - \int_0^x f(t) dt$ . Auf Grund der Flächeneigenschaft von  $\mathfrak{C}$  ist nun  $T = (1 + c)S$  mit konstantem  $c > 0$  für alle  $x \in I$ . Daraus folgt durch Differenzieren nach  $x$  die Differentialgleichung

$$x^2 f'' - c x f' + c f = c \quad (x \in I) \quad (1)$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen Differentialgleichung 2. Ordnung ist

$$f(x) = 1 + a x + b x^c \quad (a, b \text{ konstant; } x \in I),$$

denn die Funktionen  $x$  und  $x^c$  bilden für  $c \neq 1$  ein Hauptsystem der zugehörigen homogenen Differentialgleichung, während die konstante Funktion 1 eine triviale Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (1) ist. Damit  $f(x)$  auch die Randbedingungen erfüllt, muss notwendig  $0 < c < 1$  sein, und als Lösung ergibt sich

$$f(x) = \frac{1}{1-c} [(1-c) + c x - x^c] \quad (0 < c < 1; x \in I). \quad (2)$$

Aus der Flächeneigenschaft von  $\mathfrak{C}$  folgt weiterhin, dass auch die Dreiecke  $QOR$  und  $APB$  ein konstantes Inhaltsverhältnis besitzen, und zwar ist  $F(QOR) = c F(APB)$ . Wegen  $2 F(QOR) = - (f - x f')^2 / f'$  und  $2 F(APB) = 1 - x - f$  muss also  $f(x)$  der zusätzlichen Bedingung

$$(f - x f')^2 = c f' (f + x - 1) \quad (x \in I) \quad (3)$$

genügen. Mit Berücksichtigung von (2) muss demnach für alle  $x \in I$  die Gleichung

$$(1 - x^c)^2 = \left( \frac{c}{1-c} \right)^2 (1 - x^{c-1}) (x - x^c)$$

bestehen. Dies trifft genau dann zu, wenn  $c = 1/2$  ist, und damit ist

$$f(x) = 1 + x - 2\sqrt{x} = (1 - \sqrt{x})^2 \quad (x \in I)$$

die einzige Lösungsfunktion. Deren Schaubild ist eine Parabel 2. Ordnung (Scheitel  $S(1/4; 1/4)$ , Achse = 1. Winkelhalbierende). O. REUTTER, Ochsenhausen

Eine weitere Lösung sandte C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht).

**Aufgabe 516.** Es sei  $r$  der Inkreisradius,  $2s$  der Umfang und  $R$  der Umkreisradius eines reellen ebenen Dreiecks, also

$$2r \leq \frac{2s}{3\sqrt{3}} \leq R.$$

Man zeige, dass zwischen  $2r$  und  $R$  beliebig viele in  $s$  quadratische Terme in folgender Weise eingeschoben werden können:

$$2r \leq \frac{4s^2 R^{-1} - 2tr}{27-t} \leq \frac{4s^2 R^{-1} - 2Tr}{27-T} \leq R \quad (-\infty < t \leq T \leq 11).$$

I. PAASCHE, München

*Lösung:* Es genügt zu zeigen, dass der Term  $f(x) = (4s^2 R^{-1} - 2rx)/(27-x)$  in der Variablen  $x$  für  $x < 27$  monoton zunimmt und für  $x \leq 11$  der Doppelungleichung  $2r \leq f(x) \leq R$  genügt.

Aus  $4s^2 = \sum a_i^2 + 2 \sum a_i a_{i+1} \geq 3 \sum a_i a_{i+1} \geq 54 R r$  [1] folgt

$$f(x) \geq \frac{54r - 2rx}{27-x} = 2r \quad \text{und} \quad \frac{df(x)}{dx} = \frac{4s^2 R^{-1} - 54r}{(27-x)^2} \geq 0 \quad \text{für alle } x < 27,$$

womit die Monotonie und die untere Grenze von  $f(x)$  nachgewiesen sind.

Aus  $4s^2 \leq 4(3r^2 + 4Rr + 4R^2)$  [2] und  $2r \leq R$  folgt  $4s^2 \leq 16R^2 + 22Rr$  und damit  $f(11) \leq R$ , womit auch die obere Grenze von  $f(x)$  für  $x \leq 11$  nachgewiesen ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

[1] F. LEUENBERGER, *El. Math.* 13, S. 126 (1958).

[2] J. STEINIG, *El. Math.* 18, S. 129 (1963).

Weitere Lösungen sandten F. LEUENBERGER (Feldmeilen) und K. ZACHARIAS (Berlin).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 537.** Ein gegebener Kreis  $K$  wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen  $K_1, K_2$ , die durch einen festen Punkt  $F$  seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von  $K_1$  und  $K_2$ ?

C. BINDSCHIEDLER, Küsnacht

**Aufgabe 538.** Trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4$$

en nombres naturels  $x$  et  $y$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

**Aufgabe 539.** Show that the quotient

$$\frac{(a^n - 1)(a^n - a) \dots (a^n - a^{n-1})}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

is integral for arbitrary integers  $a$ . L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

**Aufgabe 540.** Sei  $a_{-1} a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \dots = 1 0 1 1 2 3 5 \dots$  die Fibonaccifolge. Für  $n = -1, 0, 1, 2, \dots$  und  $k = 0, 1, 2, \dots$  zeige man

$$\sum_{\nu=-1}^n \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^k \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu} = a_{n+2k+2}.$$

I. PAASCHE, München

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Ist in einem Dreieck  $\alpha - \beta = 90^\circ$ , so liegt der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf der Seite  $AB$ .
2. Es sind zwei Kreise gegeben:  $k_1(M_1, r_1)$ ,  $k_2(M_2, r_2)$ ,  $M_1 M_2 = d > r_1 + r_2$ . Die Tangenten von  $M_1$  an  $k_2$  schneiden  $k_1$  in vier Punkten, ebenso schneiden die Tangenten von  $M_2$  an  $k_1$  den Kreis  $k_2$  in vier Punkten. Die acht Punkte liegen zu je vieren auf zwei Parallelen zu  $M_1 M_2$ .  
 ▶ Der Abstand der beiden Parallelen ist  $2 r_1 r_2 / d$ .
3.  $k(M, r)$  ist ein fester Kreis,  $A$  ein fester Punkt. Der Punkt  $Q$  wandert auf  $k$ . Die Winkelhalbierenden von  $\sphericalangle AMQ$  schneiden  $AQ$  in  $U$  und  $V$ . Welches sind die geometrischen Örter von  $U$  und  $V$ ?  
 ▶  $AU : AQ = AM : (r + AM) = \text{konst.}$  Entsprechend für  $V$ . Die geometrischen Örter sind perspektiv-ähnliche Kreise von  $k$  bezüglich des Zentrums  $A$ .
4.  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sind die Ecken eines Pseudoquadrats, das heisst, die Diagonalen sind gleich lang und stehen senkrecht aufeinander. Die Punkte  $P_i$  teilen die Seiten  $A_i A_{i+1}$  im gleichen Verhältnis  $\lambda$ . Die Teilpunkte sind ebenfalls Ecken eines Pseudoquadrats.  
 ▶ Mache  $\bar{P}_i A_{i+1} = A_i P_i$ .  $P_1 \bar{P}_2 P_3 \bar{P}_4$  und  $\bar{P}_1 P_2 \bar{P}_3 P_4$  sind zwei kongruente Rechtecke, die sich durch eine Drehung von  $90^\circ$  zur Deckung bringen lassen; also sind die Diagonalen  $P_1 P_3$  und  $P_2 P_4$  gleich lang und zueinander normal.
5. Das Dreieck  $A_1 B_1 C_1$  ist gleichsinnig ähnlich dem Dreieck  $A_2 B_2 C_2$ . Von irgendeinem Punkt  $Z$  aus zieht man  $Z\vec{A}_3 = A_1\vec{A}_2$ ,  $Z\vec{B}_3 = B_1\vec{B}_2$ ,  $Z\vec{C}_3 = C_1\vec{C}_2$ . Stets ist  $\triangle A_3 B_3 C_3$  ähnlich  $\triangle A_1 B_1 C_1$ .  
 ▶ Es genügt, den Beweis für  $Z \equiv A_1$  zu führen. Man findet  $\triangle C_3 C_2 A_2 \sim \triangle B_3 B_2 A_2$ , woraus folgt

$$C_3 A_2 : B_3 A_2 = C_2 A_2 : B_2 A_2 \quad \text{und} \quad \sphericalangle C_3 A_2 B_3 = \sphericalangle C_2 A_2 B_2.$$

## Bericht

### Internationaler Mathematikerkongress

Moskau, 16.–26. August 1966

Die hervorragenden Leistungen russischer Mathematiker in Vergangenheit und Gegenwart sind durch ein ausgedehntes Übersetzungsprogramm allgemein bekannt geworden. Die Möglichkeiten zur persönlichen Begegnung sind hingegen immer noch beschränkt, da nur relativ wenige russische Gelehrte an Tagungen in der westlichen Welt teilnehmen. Es war daher gegeben, dass die UdSSR einmal den alle vier Jahre stattfindenden internationalen Mathematikerkongress zu sich einlud. Gegen 5000 Mathematiker aus ca. 60 Ländern (UdSSR ca. 1500, USA ca. 500, Schweiz ca. 40) leisteten dieser Einladung Folge.

Für diesen grössten Mathematikerkongress aller Zeiten konnte Moskau einen passenden Rahmen stellen. Die in dominierender Lage über der Stadt auf den Leninbergen gelegene Lomonossov-Universität (MGU), deren Hauptgebäude 31 Stockwerke umfasst, konnte in ihren Hörsälen und der 1500 Personen fassenden Aula verschiedenartigsten Platzbedürfnissen genügen. In den siebzehnstöckigen Seitenflügeln des Universitätsgebäudes finden etwa 6000 Studenten Unterkunft. Hier konnte ein grosser Teil der Kongress-