Sätze über das Sehnenviereck in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie

Autor(en): **Zeitler, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 3

PDF erstellt am: **23.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24650

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. | Band XXI | Heft 3 | Seiten 49–72 | 10. Mai 1966

Sätze über das Sehnenviereck in der sphärischen und hyperbolischen Geometrie

1. Einleitung

Die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines Vierecks liegen auf einem Kreis. Die Seiten und Diagonalen dieses Vierecks werden wie folgt bezeichnet: $a_1 = P_1 P_2$, $a_2 = P_2 P_3$, $a_3 = P_3 P_4$, $a_4 = P_4 P_1$, $e = P_2 P_4$, $f = P_1 P_3$. Dann gelten folgende Sätze:

Satz des PTOLEMÄUS

$$e\, f = a_1\, a_3 + a_2\, a_4\,. \qquad (\mathrm{I_E})$$

Satz des BRAHMAGUPTA[1])

$$\frac{e}{f} = \frac{a_1\, a_2 + a_3\, a_4}{a_1\, a_4 + a_2\, a_3}\,. \qquad (\mathrm{II_E})$$

Durch Multiplikation bzw. Division beider Gleichungen erhält man eine dritte Formel:

$$e^2 = \frac{(a_1\, a_2 + a_3\, a_4)\,(a_1\, a_3 + a_2\, a_4)}{a_1\, a_4 + a_2\, a_3} \quad \text{und} \quad f^2 = \frac{(a_1\, a_4 + a_2\, a_3)\,(a_1\, a_3 + a_2\, a_4)}{a_1\, a_2 + a_3\, a_4}\,. \qquad (\mathrm{III_E})$$

Die genannten Sätze stimmen auch dann noch, wenn der Kreis, auf dem die Eckpunkte des Vierecks liegen, zur Geraden entartet.

Analoge Sätze gibt es auch für die sphärische und hyperbolische Geometrie. Die dazugehörenden Beweise lassen sich auf verschiedene Arten führen. Man kann auf Modelle überhaupt verzichten und verwendet dann nur axiomatisch bewiesene Sätze der betreffenden Geometrie. Oder aber man arbeitet mit Modellen aus dem Bereich der euklidischen Geometrie. In diesem Falle sind als Beweismittel alle bekannten Sätze der euklidischen Geometrie zugelassen. Auf dem ersten Wege hat O. PERRON [1] [2] die Sätze I und III für die hyperbolische Geometrie bewiesen. In der vorliegenden Arbeit zeigen wir die Gültigkeit der Sätze I und II (und damit auch III) für die sphärische und hyperbolische Geometrie im Rahmen von Modellen.

---

[1]) Nach einer Mitteilung von Herrn Prof. STRUBECKER findet sich diese Formel zuerst bei dem Inder BRAHMAGUPTA (* 598), allerdings ohne Beweis und ohne explizite Angabe der Gültigkeitsbedingungen. Allgemein hat die Formel für alle Sehnenvierecke erst REGIOMONTAN (1464) bewiesen.

2. Die Sätze im Kugelmodell der sphärischen Geometrie

a) *Formulierung der Sätze*

Die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines sphärischen Vierecks liegen auf einem sphärischen Kreis. Die Seiten und Diagonalen dieses Vierecks werden wie folgt bezeichnet:

$$a_1 = P_1 P_2, \quad a_2 = P_2 P_3, \quad a_3 = P_3 P_4, \quad a_4 = P_4 P_1, \quad e = P_2 P_4, \quad f = P_1 P_3.$$

Dann gelten folgende Sätze:

$$\sin\frac{e}{2R}\sin\frac{f}{2R} = \sin\frac{a_1}{2R}\sin\frac{a_3}{2R} + \sin\frac{a_2}{2R}\sin\frac{a_4}{2R}, \tag{I$_S$}$$

$$\frac{\sin\frac{e}{2R}}{\sin\frac{f}{2R}} = \frac{\sin\frac{a_1}{2R}\sin\frac{a_2}{2R} + \sin\frac{a_3}{2R}\sin\frac{a_4}{2R}}{\sin\frac{a_1}{2R}\sin\frac{a_4}{2R} + \sin\frac{a_2}{2R}\sin\frac{a_3}{2R}}. \tag{II$_S$}$$

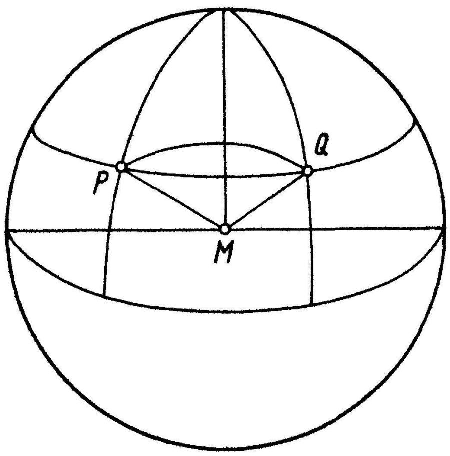
Die Sätze stimmen auch dann noch, wenn der Kreis zur sphärischen Geraden entartet (R ist dabei eine positive Konstante, deren Wert von der sphärischen Längeneinheit abhängt. Im Kugelmodell wird R als Radius der Modellkugel interpretiert).

b) *Skizze des Kugelmodells*

Den Grundbegriffen der sphärischen Geometrie werden euklidische Begriffe zugeordnet. Zum Beispiel:

Sphärische Punkte	... alle euklidischen Punkte der Oberfläche einer Kugel vom Radius R,
Sphärische Geraden	... alle Grosskreise der Kugel,
Sphärische Kreise	... alle Kleinkreise auf der Kugel.

c) *Zusammenhang zwischen euklidischer und sphärischer Längenmasszahl*



Figur 1

Zwei Modellpunkte P, Q (Figur 1) bestimmen eine sphärische Strecke der Länge $\boldsymbol{a}$ und gleichzeitig eine euklidische Strecke der Länge $\boldsymbol{a}$. Wir suchen jetzt einen Zusammenhang zwischen den beiden Längenmasszahlen. Zu den Punkten P, Q gehört der

Mittelpunktswinkel $\sphericalangle\ PMQ = a/R$. Aus dem euklidischen Dreieck PMQ entnehmen wir dann sofort den gesuchten Zusammenhang:

$$\boxed{a = 2R\sin\frac{a}{2R}} \tag{1}$$

d) Der Beweis

Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf einem sphärischen Kreis oder einer sphärischen Geraden bestimmen ein sphärisches Sehnenviereck mit den Seiten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ und den Diagonalen $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$. Im Modell liegen die vier Punkte auf einem Kugelkleinkreis oder einem Kugelgrosskreis. Sie bestimmen also auch noch ein euklidisches Sehnenviereck mit den Seiten a_1, a_2, a_3, a_4 und den Diagonalen e, f. Aus der Gültigkeit von $(\mathrm{I_E})$ und $(\mathrm{II_E})$ für das euklidische Sehnenviereck folgt mit (1) durch Einsetzen sofort die Gültigkeit der Formeln $(\mathrm{I_S})$ und $(\mathrm{II_S})$.

3. Die Sätze im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie

a) Hilfssatz

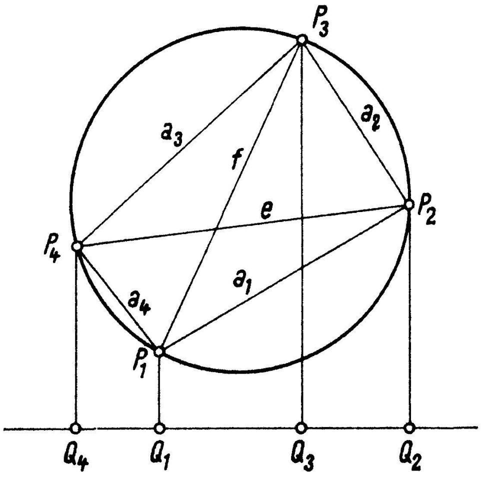
Wird ein euklidisches Sehnenviereck, wie aus Figur 2 ersichtlich, orthogonal auf eine, ausserhalb des Vierecks liegende Gerade projiziert und bezeichnen wir die Lote von P_i auf diese Gerade mit h_i $(i = 1,2,3,4)$, so gilt:

$$\frac{\dfrac{e}{\sqrt{h_4 h_2}}}{\dfrac{f}{\sqrt{h_1 h_3}}} = \frac{\dfrac{a_1 a_2}{\sqrt{h_1 h_2}\sqrt{h_2 h_3}} + \dfrac{a_3 a_4}{\sqrt{h_3 h_4}\sqrt{h_4 h_1}}}{\dfrac{a_1 a_4}{\sqrt{h_1 h_2}\sqrt{h_1 h_4}} + \dfrac{a_2 a_3}{\sqrt{h_2 h_3}\sqrt{h_3 h_4}}}, \tag{$\mathrm{II'_E}$}$$

oder nach leichter Umformung:

$$\frac{e}{f} = \frac{h_4 a_1 a_2 + h_2 a_3 a_4}{h_1 a_2 a_3 + h_3 a_1 a_4}. \tag{$\mathrm{II''_E}$}$$

Dieser Satz behält seine Gültigkeit auch dann noch, wenn der Kreis zur Geraden entartet.



Figur 2

Zum Beweis geben wir die Fläche des Dreiecks $P_1 P_2 P_4$ auf zwei verschiedene Arten an:

$$\frac{a_4 a_1 e}{4r} = \frac{h_2 + h_4}{2} Q_2 Q_4 - \frac{h_1 + h_4}{2} Q_1 Q_4 - \frac{h_1 + h_2}{2} Q_1 Q_2 .$$

(Dabei ist r der Radius des Kreises, auf dem die Eckpunkte des Vierecks liegen). Analog gilt für die Fläche des Dreiecks $P_2 P_3 P_4$:

$$\frac{a_2 a_3 e}{4r} = \frac{h_3 + h_4}{2} Q_3 Q_4 + \frac{h_2 + h_3}{2} Q_2 Q_3 - \frac{h_4 + h_2}{2} Q_2 Q_4 .$$

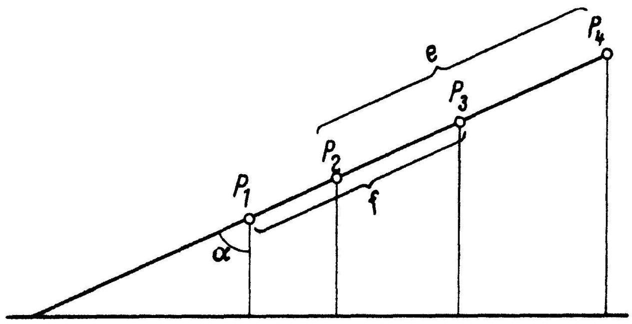
Durch Multiplikation mit h_3 bzw. h_1 und Addition folgt:

$$\frac{e}{2r} (a_1 a_4 h_3 + a_2 a_3 h_1) = h_3 h_4 Q_1 Q_2 + h_2 h_3 Q_4 Q_1 - h_1 h_4 Q_3 Q_2 - h_1 h_2 Q_4 Q_3 .$$

Entsprechend ergibt sich durch Betrachtung der Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ und $P_1 P_3 P_4$:

$$\frac{f}{2r} (a_1 a_2 h_4 + a_3 a_4 h_2) = h_3 h_4 Q_1 Q_2 + h_2 h_3 Q_4 Q_1 - h_1 h_4 Q_3 Q_2 - h_1 h_2 Q_4 Q_3 .$$

Da die rechtsstehenden Ausdrücke gleich sind, erhält man durch Division sofort (II_E''). Dieser und andere Beweise unseres Hilfssatzes, ausserdem gewisse Verallgemeinerungen finden sich in [3].



Figur 3

Liegen die Punkte P_i auf einer Geraden, wie Figur 3 zeigt, so gilt:

$$a_1 = \frac{h_2 - h_1}{\cos\alpha}, \quad a_2 = \frac{h_3 - h_2}{\cos\alpha}, \quad a_3 = \frac{h_4 - h_3}{\cos\alpha}, \quad a_4 = \frac{h_4 - h_1}{\cos\alpha},$$

$$f = \frac{h_3 - h_1}{\cos\alpha}, \quad e = \frac{h_4 - h_2}{\cos\alpha}.$$

Die Richtigkeit der Gleichung (II_E'') in diesem Entartungsfall erkennen wir sofort durch Einsetzen. Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

b) Formulierung der Sätze

Die Ecken P_1, P_2, P_3, P_4 eines hyperbolischen Vierecks liegen auf einem Horozyklus, einem Hyperzyklus, einem gewöhnlichen hyperbolischen Kreis oder einer hyperbolischen Geraden. Die Seiten und Diagonalen dieses Vierecks werden wie folgt bezeichnet:

$$\boldsymbol{a}_1 = P_1 P_2, \quad \boldsymbol{a}_2 = P_2 P_3, \quad \boldsymbol{a}_3 = P_3 P_4, \quad \boldsymbol{a}_4 = P_4 P_1, \quad \boldsymbol{e} = P_2 P_4, \quad \boldsymbol{f} = P_1 P_3 .$$

Dann gelten folgende Sätze:

$$\operatorname{sh}\frac{e}{2R}\operatorname{sh}\frac{f}{2R} = \operatorname{sh}\frac{a_1}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_3}{2R} + \operatorname{sh}\frac{a_2}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_4}{2R}, \qquad (\mathrm{I_H})$$

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{e}{2R}}{\operatorname{sh}\frac{f}{2R}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{a_1}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_2}{2R} + \operatorname{sh}\frac{a_3}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_4}{2R}}{\operatorname{sh}\frac{a_1}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_4}{2R} + \operatorname{sh}\frac{a_2}{2R}\operatorname{sh}\frac{a_3}{2R}}. \qquad (\mathrm{II_H})$$

(R ist dabei eine positive Konstante, deren Wert von der hyperbolischen Längeneinheit abhängt.)

c) *Skizze des (speziellen) Poincaré-Modells*

Den Grundbegriffen der hyperbolischen Geometrie werden euklidische Begriffe zugeordnet. Zum Beispiel:

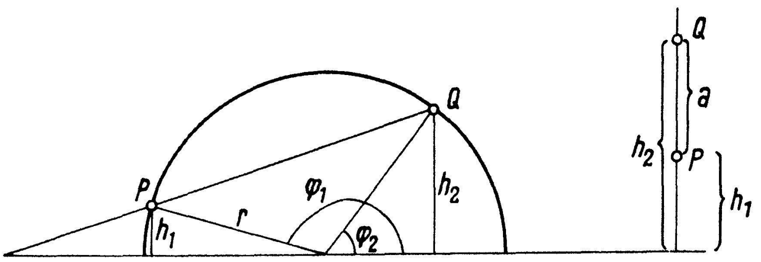
Hyperbolische Punkte ... alle euklidischen Punkte einer Halbebene. Die Punkte der Begrenzungsgeraden (Achse) dieser ausgezeichneten Halbebene gelten nicht als hyperbolische Punkte,

Hyperbolische Geraden ... alle euklidischen Halbkreise und Halbgeraden der ausgezeichneten Halbebene, die auf der Achse senkrecht stehen,

Hyperbolische Kreise ... alle euklidischen Geraden, Kreise und Kreisbögen der ausgezeichneten Halbebene, die keine hyperbolischen Geraden darstellen (Drei Arten: Horozyklus, Hyperzyklus, gewöhnlicher hyperbolischer Kreis).

d) *Zusammenhang zwischen euklidischer und hyperbolischer Längenmasszahl*

Zwei Modellpunkte P, Q bestimmen eine hyperbolische Strecke der Länge $\boldsymbol{a}$ und gleichzeitig eine euklidische Strecke der Länge a. Wir suchen wieder einen Zusammenhang zwischen den beiden Masszahlen.



Figur 4

Ist die durch P und Q eindeutig bestimmte hyperbolische Gerade nicht zur euklidischen Geraden entartet, so gilt für die hyperbolische Länge $\boldsymbol{a}$ der hyperbolischen Strecke $P\,Q$ mit den Bezeichnungen von Figur 4 bekanntlich ([4], S. 61):

$$\boldsymbol{a} = \frac{R}{2}\ln\left[\frac{1+\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_2} : \frac{1+\cos\varphi_1}{1-\cos\varphi_1}\right].$$

Daraus folgt:

$$e^{a/2R} = \left(\frac{1+\cos\varphi_2}{1-\cos\varphi_2}\,\frac{1-\cos\varphi_1}{1+\cos\varphi_1}\right)^{1/4}.$$

Wir erhalten also:

$$\mathrm{sh}\frac{a}{2R} = \frac{1}{2}\left(e^{a/2R} - e^{-a/2R}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{(1+\cos\varphi_2)(1-\cos\varphi_1)} - \sqrt{(1-\cos\varphi_2)(1+\cos\varphi_1)}}{\sqrt{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}}.$$

Durch Anwendung von Additionstheoremen ergibt sich:

$$\mathrm{sh}\frac{a}{2R} = \frac{\sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}{\sqrt{\sin\varphi_1\sin\varphi_2}}.$$

Aus Figur 4 entnehmen wir weiter:

$$\sin\varphi_1 = \frac{h_1}{r},\quad \sin\varphi_2 = \frac{h_2}{r},\quad \sin\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2} = \frac{a}{2r}.$$

Das aber bedeutet:

$$\boxed{a = 2\sqrt{h_1 h_2}\ \mathrm{sh}\frac{a}{2R}} \tag{2}$$

Ist die durch P und Q eindeutig bestimmte hyperbolische Gerade gleichzeitig euklidische Gerade (Figur 4, rechts), so gilt für die hyperbolische Länge $\boldsymbol{a}$ der hyperbolischen Strecke PQ bekanntlich ([4], S. 40):

$$\boldsymbol{a} = R\ln\frac{h_2}{h_1}.$$

Damit ergibt sich weiter:

$$e^{\boldsymbol{a}/2R} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

und schliesslich:

$$\mathrm{sh}\frac{\boldsymbol{a}}{2R} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{h_2}{h_1}} - \sqrt{\frac{h_1}{h_2}}\right) = \frac{h_2-h_1}{2\sqrt{h_1 h_2}} = \frac{a}{2\sqrt{h_1 h_2}}.$$

Das aber ist wieder Formel (2).

e) Der Beweis

Vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 auf einem gewöhnlichen hyperbolischen Kreis, einem Horozyklus, einem Hyperzyklus oder einer hyperbolischen Geraden bestimmen ein hyperbolisches Sehnenviereck mit den Seiten $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ und den Diagonalen $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$. Im Poincaré-Modell liegen die vier Punkte entweder auf einem euklidischen Kreis oder einer euklidischen Geraden. Sie bestimmen also auch noch ein euklidisches Sehnenviereck mit den Seiten a_1, a_2, a_3, a_4 und den Diagonalen e, f.

Aus der Gültigkeit von ($\mathrm{I_E}$) und ($\mathrm{II'_E}$) für das euklidische Sehnenviereck folgt mit (2) durch Einsetzen sofort die Gültigkeit der Formeln ($\mathrm{I_H}$) und ($\mathrm{II_H}$).

4. Zusammenfassung der Formeln

Wir weisen noch auf die Übergänge zwischen den einzelnen Formeln hin. Aus den sphärischen Formeln werden sofort die euklidischen, wenn der Kugelradius R unbegrenzt wächst. Nimmt man dagegen eine Kugel mit rein imaginärem Radius, ersetzt man also R durch $i\,R$, so gehen die sphärischen in die hyperbolischen Formeln über.

Meist wird die Längeneinheit so festgelegt, dass die Konstante R den Wert 1 hat. Für diesen Fall fassen wir die beiden Formeln für die drei Geometrien zu je einer einzigen zusammen.

Wir definieren ([5], S. 64):

$$S(a) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin\sqrt{K}\, a .$$

Damit lauten die Sätze:

I. PTOLEMÄUS:

$$S\left(\frac{e}{2}\right) S\left(\frac{f}{2}\right) = S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_3}{2}\right) + S\left(\frac{a_2}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right).$$

II. BRAHMAGUPTA:

$$\frac{S\left(\frac{e}{2}\right)}{S\left(\frac{f}{2}\right)} = \frac{S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_2}{2}\right) + S\left(\frac{a_3}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right)}{S\left(\frac{a_1}{2}\right) S\left(\frac{a_4}{2}\right) + S\left(\frac{a_2}{2}\right) S\left(\frac{a_3}{2}\right)}.$$

Für $k = 1$ sind dies die Formeln (I_S), (II_S), für $k = -1$ (I_H), (II_H) und für $k \to 0$ schliesslich (I_E), (II_E).

H. ZEITLER, Weiden, Deutschl.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] O. PERRON, *Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie*, Bayr. Akademie der Wissenschaften, 1963.
[2] O. PERRON, *Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks in der hyperbolischen Geometrie*, Math. Zeitschrift *84*, 1964.
[3] Praxis der Mathematik, 1965, P. *207*, S. 48.
[4] H. MESCHKOWSKI, *Nichteuklidische Geometrie*, Braunschweig 1954.
[5] K. FLADT, *Elementargeometrie III*, Stuttgart 1961.

Kleine Mitteilungen

Explizite Darstellungen der natürlichen Logarithmusfunktion

1. Problemstellung. Die natürliche Logarithmusfunktion ist gekennzeichnet als die einzige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad [f\colon P \to R]^{1)} \qquad \text{(H)}$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$f(x) \leq x - 1 \qquad [\text{alle } x \in P]^{2)}. \qquad (1)$$

---

1) R bedeute durchwegs die Menge der reellen Zahlen, P diejenige der positiven reellen Zahlen.

2) Vergleiche [1], p. 114. Für andere zur Charakterisierung geeignete Eigenschaften vergleiche [8], Sätze 6 und 7.