

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 4

PDF erstellt am: **24.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### On Estimating the Perimeter of an Ellipse

Let  $E$  be an ellipse with semi-axes  $a$  and  $b$ ,  $a > b$ . HADWIGER, in [1], gives an elementary proof that the perimeter  $L$  of  $E$  satisfies

$$L > \pi (a + b). \tag{1}$$

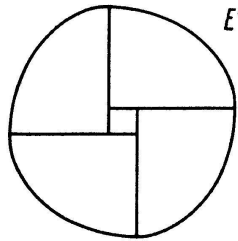
It is of interest to note that (1) is a consequence of an elegant «cutting and rearrangement» operation (see [2], page 158) and the isoperimetric inequality. One cuts the ellipse along its axes into four congruent pieces and rearranges these pieces into the figure  $E'$  (Figure). Then  $E'$  has perimeter  $L$ , and area  $A + (a - b)^2$ , where  $A$  is the area of  $E$ . The isoperimetric inequality, applied to  $E'$ , yields  $L^2 > 4 \pi (A + (a - b)^2)$ , or

$$L^2 - 4 \pi A > 4 \pi (a - b)^2. \tag{2}$$

Using  $A = \pi a b$ , we have

$$L^2 > 4 \pi^2 a b + 4 \pi (a - b)^2 > \pi^2 (a + b)^2, \tag{3}$$

from which (1) follows.



G. D. CHAKERIAN, University of California, Davis/Calif.

#### REFERENCES

- [1] H. HADWIGER, *Zur Schätzung des Ellipsenumfanges*, *El. Math.* 4, 11–12 (1949).
- [2] H. STEINHAUS, *Mathematical Snapshots* (Oxford University Press, New York 1960).

## Aufgaben

**Aufgabe 481.** In einem Dreieck  $\Delta$  seien  $a_i$  die Seiten,  $h_i$  die Höhen und  $r_i$  die Ankreisradien ( $i = 1, 2, 3$ ). Ist  $F$  die Fläche,  $R$  der Umkreisradius und  $r$  der Inkreisradius von  $\Delta$ , so beweise man die Gültigkeit der Ungleichungskette

$$4 \sum_{i < j} h_i h_j \leq 12 F \sqrt{3} \leq 54 R r \leq 3 \sum_{i < j} a_i a_j \leq 4 \sum_{i < j} r_i r_j.$$

Die aus dem Anfangs- und Endglied der Kette bestehende Ungleichung hat kürzlich A. MAKOWSKI angegeben: *Problem E 1675*, *Amer. Math. Monthly* 71, 317 (1964).

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

*Solution:*

(1) Since  $4 \sum_{i < j} r_i r_j = (\sum a_i)^2$  and  $3 \sum_{i < j} a_i a_j \leq (\sum a_i)^2$ , we get  $3 \sum_{i < j} a_i a_j \leq 4 \sum_{i < j} r_i r_j$ .

(2) The inequality  $18 R r \leq \sum_{i < j} a_i a_j$  was proved by the proposer in his paper *Einige Dreiecksungleichungen*, *El. Math.* 13, 121–126 (1958).

(3) We have  $a_1 a_2 a_3 = 16 r R^2 \prod \cos \frac{\alpha_i}{2} \leq 6 \sqrt{3} r R^2$ . Further,  $F = \frac{a_1 a_2 a_3}{4 R}$ , so that  $2 F \leq 3 \sqrt{3} r R$ .

(4) By multiplying the identities  $h_1 h_2 h_3 = \frac{2 F^2}{R}$  and  $\sum_{i < j} h_i^{-1} = r^{-1}$ , we obtain  $\sum_{i < j} h_i h_j = \frac{2 F^2}{R r}$ . It then follows from (3) that  $\sum_{i < j} h_i h_j \leq 3 \sqrt{3} F$ .

J. STEINIG, Zürich

Weitere Lösungen sandten H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil), K. ZACHARIAS (Berlin).

**Aufgabe 482.** Es sei  $|e|$  die Länge des Vektors  $e$ , und  $e_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) seien die Einheitsvektoren des  $R^n$ . Man deute die Grösse

$$l_n = \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_\nu \leq n} |e_{\mu_1} + \dots + e_{\mu_\nu}|$$

geometrisch und beweise, dass  $l_1, l_2, \dots$  eine streng monoton fallende Folge mit positiven Gliedern ist.

J. SPILKER, Freiburg/Br.

*Lösung des Aufgabenstellers:* 1) Bildet man für den  $n$ -dimensionalen Einheitswürfel den Ausdruck

$$k_n := \text{Gesamtlänge aller Kanten} - \text{Länge aller Flächendiagonalen} \\ + \text{Länge aller Raumdiagonalen} \pm \dots,$$

so ist offenbar

$$k_n = 2^{n-1} \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu+1} \binom{n}{\nu} \sqrt{\nu} = 2^{n-1} l_n.$$

Damit ist  $l_n$  geometrisch gedeutet.

2) Sei  $f(x)$  für  $x \geq 0$  erklärt und beliebig oft differenzierbar. Es bezeichne  $\Delta f(x) := f(x+1) - f(x)$ ,  $\Delta^\nu f(x) := \Delta[\Delta^{\nu-1} f(x)]$ . Dann ist

$$\Delta^n f(x) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} f(x+\nu) \quad n = 1, 2, \dots; \quad x \geq 0.$$

Andererseits ergibt  $n$ -fache Anwendung des Mittelwertsatzes für geeignete (von  $x$  und  $n$  abhängige) Zwischenwerte  $\xi_\nu$  mit  $0 < \xi_\nu < \nu$ :

$$\Delta^n f(x) = [\Delta^{n-1} f(x)]' |_{x+\xi_1} = [\Delta^{n-2} f(x)]'' |_{x+\xi_2} = \dots = f^{(n)}(x + \xi_n).$$

Für  $f(x) = \sqrt{x}$  folgt

$$l_n = (-1)^{n+1} \Delta^n \sqrt{x} |_{x=0} = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} \sqrt{x} |_{\xi_n} \quad 0 < \xi_n < n \\ = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) 2^{-n} \xi_n^{-n+1/2} > 0 \quad n = 2, 3, \dots$$

$$3) \quad l_n - l_{n+1} = (-1)^{n+1} \Delta^n \sqrt{x} |_{x=0} - (-1)^{n+2} \Delta^{n+1} \sqrt{x} |_{x=0} \\ = (-1)^{n+1} \Delta^n \sqrt{x} |_{x-1} = (-1)^{n+1} \frac{d^n}{dx^n} \sqrt{x} |_{1+\eta_n} \quad 0 < \eta_n < n \\ = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) 2^{-n} (1+\eta_n)^{-n+1/2} > 0. \quad n = 2, 3, \dots$$

Ich kenne den Grenzwert der Folge nicht.

**Aufgabe 483.** Démontrer d'une façon élémentaire qu'il existe pour tout nombre entier  $a$  une infinité des nombres naturels  $x$  pour lesquels le nombre  $x^2 + a$  est divisible par un carré d'un nombre naturel  $> 1$ .

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

1. *Lösung:* Bedeutet  $n$  eine beliebige natürliche Zahl, so wird  $a + x^2$  im Fall  $a \equiv 0 \pmod{4}$  für  $x = 2n$ , im Fall  $a \equiv 3 \pmod{4}$  für  $x = 2n - 1$  durch 4 teilbar. Ist  $a \equiv 1 \pmod{4}$ , so ist das Binom für  $x = (a - 1)/2 + n(a + 1)^2/4$  durch  $(a + 1)^2/4$  teilbar. Für  $a = 1$  gibt  $x = 7 + 25n$  ein durch 25 teilbares Binom. Ist endlich  $a \equiv 2 \pmod{4}$ , so wird  $(a + 1)^2$  ein Teiler des Binoms für  $x = a^{n(a+1)-a/2}$ , wie man aus der Zerlegung

$$a + x^2 = a(1 + a)(1 - a + a^2 - a^3 + \dots)$$

erkennt, wo in der zweiten Klammer  $(2n - 1)(a + 1)$  Summanden stehen, von denen jeder  $\equiv 1 \pmod{a + 1}$  ist.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

2<sup>de</sup> *Solution:* Nous démontrons la proposition suivante, qui contient celle de M. SIERPIŃSKI:

Soit  $a$  un entier donné,  $n$  un nombre naturel tel que  $(a, n) = 1$ ,  $n^2 + a \neq 2^k$  et  $p$  un diviseur premier impair de  $n^2 + a$ . Alors il existe une infinité de nombres naturels  $x$  tels que  $p^2$  divise  $x^2 + a$ .

Remarquons tout d'abord qu'il suffit de démontrer l'existence d'un seul nombre naturel, disons  $x_0$ , tel que  $p^2 \mid x_0^2 + a$ . En effet, si tel est le cas, on aura également

$$p^2 \mid (\lambda p^2 + x_0)^2 + a \quad \text{pour } |\lambda| = 1, 2, 3, \dots$$

Supposons donc que  $p \mid n^2 + a$ . C'est dire que la congruence

$$x^2 \equiv -a \pmod{p} \tag{1}$$

possède les deux racines  $x = n$  et  $x = -n$ . Il est alors facile d'obtenir, par un procédé bien connu, deux racines de la congruence

$$x^2 \equiv -a \pmod{p^2}. \tag{2}$$

On procède comme suit: puisque  $p \mid n^2 + a$ , il existe un entier  $m$  tel que

$$n^2 = pm - a. \tag{3}$$

De plus,  $p$  est impair et  $(a, n) = 1$ , d'où  $(2n, p) = 1$ ; il existe donc un et un seul entier  $s$  tel que

$$2ns + m \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad 0 \leq s \leq p - 1. \tag{4}$$

Posons alors

$$x_{01} = n + sp; \tag{5}$$

ce sera une racine de (2). En effet, (5) donne

$$x_{01}^2 \equiv n^2 + 2nsp \pmod{p^2}, \tag{6}$$

ou encore, en portant (3) dans (6) et en tenant compte de (4),

$$x_{01}^2 \equiv -a \pmod{p^2}.$$

On obtient de la même manière une racine  $x_{02}$  de (2) en partant de la racine  $x = -n$  de (1).

On démontrerait de la même façon la proposition plus générale suivante:

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers donnés, premiers entre eux,  $n$  un nombre naturel tel que  $(a, bn) = 1$  et  $p$  un diviseur premier impair de  $bn^2 + a$ . Alors pour tout nombre naturel  $r$  il existe une infinité de nombres naturels  $x$  tels que  $p^r$  divise  $bx^2 + a$ .  
J. STEINIG, Zürich

Der Aufgabensteller bemerkt, dass man folgende beiden Aussagen beweisen kann: 1) Ist  $f(x)$  ein Polynom mit ganzen Koeffizienten, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen  $m$ , so dass  $f(m)$  durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist. 2) Zu jeder natürlichen Zahl  $n$  existiert eine ganze Zahl  $a$  so, dass die Zahlen  $1^2 + a, 2^2 + a, \dots, n^2 + a$  quadratfrei sind.

Weitere Lösungen sandten H. GAEBELEIN (Helmstedt), O. REUTTER (Ochsenhausen), E. ROTHMUND (Wallisellen).

**Aufgabe 484.** Let  $G$  be the centroid of a triangle  $A_1A_2A_3$  and

$$\alpha_i = \sphericalangle A_{i-1}A_iA_{i+1}, \quad \beta_i = \sphericalangle A_{i-1}GA_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Prove the formula

$$\frac{p}{2r} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{\sin \alpha_i} - \operatorname{ctg} \beta_i \right),$$

where  $p$  is the perimeter and  $r$  the inradius of the triangle.

C. KARANICOLOFF, Sofia

*Lösung:* Bezeichnet man mit  $s_i = \overline{A_i S_i}$  die Schwerlinien, so folgt z. B. aus dem Dreieck  $A_1 G A_2$  nach dem Cosinus-Satz:

$$\cos \beta_3 = \frac{4s_1^2 + 4s_2^2 - 9a_3^2}{8s_1s_2}.$$

Entsprechend erhält man aus der Beziehung  $3 \Delta A_1 G A_2 = \Delta A_1 A_2 A_3$  für  $\sin \beta_3$  den Ausdruck  $\sin \beta_3 = 3pr/4s_1s_2$  und somit

$$\cot \beta_3 = \frac{4s_1^2 + 4s_2^2 - 9a_3^2}{6pr}.$$

Benützt man die Beziehung  $4s_1^2 = 2a_2^2 + 2a_3^2 - a_1^2$  und die entsprechenden für  $s_2$  und  $s_3$ , so wird

$$\sum \cot \beta_i = -\frac{\sum a_i^2}{2rp}.$$

Schliesslich folgt aus  $2 \Delta A_1 A_2 A_3 = a_2 a_3 \sin \alpha_1 = pr$  usw.  $1/\sin \alpha_1 = 2a_2 a_3/2pr$  usw. und damit

$$\sum \left( \frac{1}{\sin \alpha_i} - \cot \beta_i \right) = \frac{p^2}{2pr} = \frac{p}{2r}.$$

K. SCHULER, ROTTWEIL

O. REUTTER (Ochsenhausen) bemerkt, dass die Formel der Aufgabe auch gilt, wenn  $G$  der Höhenschnittpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ist. Er bildet das Produkt der Relationen  $p = \sum a_i$ ,  $1/r = \sum 1/h_i$  ( $a_i =$  Seite,  $h_i =$  Höhe,  $i = 1, 2, 3$ ) und erhält  $p/r = 2 \sum (1/\sin \alpha_i + \operatorname{ctg} \alpha_i)$ . Die Formel der Aufgabe ist also mit der Relation  $\sum \operatorname{ctg} \alpha_i + \sum \operatorname{ctg} \beta_i = 0$  äquivalent, die für den Fall des Höhenschnittpunkts trivialerweise erfüllt ist.

Weitere Lösungen sandten H. FRISCHKNECHT (Berneck), H. GAEBELEIN (Helmstedt), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), E. ROTHMUND (Wallisellen), K. ZACHARIAS (Berlin).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 505.** Es sei  $I$  der Inkreismittelpunkt des Dreiecks  $ABC$ . Befindet sich  $I$  auf der Eulerschen Geraden, so ist das Dreieck gleichschenkelig.

ESTHER SZEKERES, Sydney/Australien

**Aufgabe 506.**  $y = y(x)$  sei eine in der Umgebung  $U$  des Nullpunktes beliebig oft differenzierbare Funktion.  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) \neq 0$  werde vorausgesetzt. Man zeige, dass dann für alle  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt

$$\left\{ \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left[ \frac{x}{y(x)} \right]^n \right\}_{x=0} = \left\{ \left[ \frac{d}{y'(x) dx} \right]^n x \right\}_{x=0} = \left\{ \frac{d^n}{dy^n} x(y) \right\}_{y=0},$$

wobei  $x(y)$  die zu  $y(x)$  inverse Funktion ist.

G. BACH, Braunschweig

**Aufgabe 507.** Man beweise: Ist  $R$  die reelle affine Ebene und  $P$  eine endliche Punktmenge von  $R$  und treffen alle Geraden und alle Kreise von  $R$ , die  $P$  in drei Punkten treffen,  $P$  sogar in vier Punkten, so sind die Punkte von  $P$  entweder kollinear oder konzyklisch.

HEINZ LÜNEBURG, Mainz

**Aufgabe 508.** Es bedeute  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der natürlichen Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .  $p_1 < p_2 < \dots$  sei eine unendliche Teilfolge  $P'$  der Folge  $P$  aller Primzahlen.  $a_1 < a_2 < \dots$  sei die Folge aller natürlichen Zahlen, in deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus  $P'$  vorkommen. Man beweise, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\{a_1, a_2, \dots, a_n\}}$$

immer irrational ist. Für  $P' = P$  ist das die Aufgabe 308 [El. Math. 14, 39 (1959)].

P. ERDÖS

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Von einem geraden Kreiskegelstumpf sind die Höhe  $h$  und der Umfang des Achsen-schnitts  $2s$  gegeben. Für die Oberfläche findet man

$$F = \frac{1}{2} \pi (s^2 - h^2).$$

2. Zwei Kreise mit den Radien  $R$  und  $r$  berühren sich von aussen. Eine gemeinsame äussere Tangente begrenzt mit zwei Kreisbögen ein konvexes Flächenstück, das um die Zentrale der beiden Kreise rotiert. Das erzeugte Volumen ist

$$V = \frac{4\pi}{3} \frac{R^2 r^2}{R + r}.$$

3. Ein rechtwinkliges Tetraeder hat die Ecken  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $C(0; 0; c)$ . Für die Winkel des Dreiecks  $ABC$  gilt

$$\operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta : \operatorname{ctg} \gamma = a^2 : b^2 : c^2.$$

4.  $M$  sei der Mittelpunkt der Umkugel des rechtwinkligen Tetraeders  $O(0; 0; 0)$ ,  $A(a; 0; 0)$ ,  $B(0; a; 0)$ ,  $C(0; 0; a)$ . Die vier Kugeln um  $O$ ,  $A$ ,  $B$  und  $C$ , die durch  $M$  gehen, schneiden sich zu je dreien in den vier Punkten  $O'$ ,  $A'$ ,  $B'$  und  $C'$ . Zeige, dass diese vier Punkte in einer Ebene liegen.

► Man findet:  $M(a/2; a/2; a/2)$ ,  $O'(a/6; a/6; a/6)$ ,  $A'(-a/2; a/2; a/2)$ ,  $B'(a/2; -a/2; a/2)$ ,  $C'(a/2; a/2; -a/2)$ . Die vier Punkte liegen in der Ebene  $x + y + z = a/2$ .

5.  $ABCD$  ist ein ebenes oder windschiefes Viereck. Man teilt  $AB$  in  $M$  und  $CD$  in  $N$  so, dass

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{AD}{BC}.$$

Die Gerade  $MN$  bildet mit  $AD$  und  $BC$  gleiche Winkel.

► Zeichne die Parallelogramme  $DAME$  und  $CBMF$ . Die Punkte  $E$ ,  $N$ ,  $F$  liegen in einer Gerade.  $MN$  ist Winkelhalbierende im Dreieck  $EMF$ .

**Bemerkung** zu Aufgabe 3, El. Math. 19, 140 (1964).

Ich werde darauf aufmerksam gemacht, dass Herr PAUL FINSLER die angegebene Näherung für die Neuneckseite schon 1938, Comm. Math. Helv. 10, Seite 247 veröffentlichte, und zwar wurde sie da auf systematische Weise entwickelt.