

Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 6

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ungelöste Probleme

Nachtrag zu Nr. 46 (El. Math. 18, S. 85). Die Stufe s eines (nicht formalreellen) Körpers K war definiert als die kleinste Zahl, so dass -1 Summe von s Quadraten aus K ist. Die Herren J. W. S. CASSELS (Cambridge) und A. PFISTER (München) haben gezeigt, dass s stets eine Potenz von 2 sein muss, und dass andererseits jede Zweierpotenz wirklich Stufe eines Körpers ist. Die (bisher unveröffentlichten) Beweise verwenden nur Grundkenntnisse der Algebra. Der entscheidende Hilfssatz von J. W. S. CASSELS lautet: Ist das Polynom $f(x) \in K[x]$ Summe von n Quadraten aus dem Körper $K(x)$, so ist $f(x)$ auch Summe von n Quadraten aus dem Polynomring $K[x]$.

H. LENZ

Kleine Mitteilungen

Notiz über Primzahlreihen

Primzahlen (PZ) p sind in der Form $\kappa p = a^2 + D b^2$ darstellbar, worin κ eine kleine Zahl (1, 2, 4, ...) sein kann, a, b, D ganze positive Zahlen bedeuten. Zu jeder Kombination κ, D gehört eine mehr oder weniger ausgedehnte Reihe von PZ (mit verschiedenen a und b). Für $\kappa = 1, D = 1$ enthält die Reihe zum Beispiel im Bereich bis 100 000 rund die Hälfte aller 9592 PZ (man beachte, dass diese PZ der arithmetischen Reihe $4\lambda + 1$ angehören und es rund ebenso viele PZ in der arithmetischen Reihe $4\lambda + 3$ geben muss, λ eine ganze positive Zahl). Auch $D = 2, 3, 7$ liefern mit $\kappa = 1$ Reihen, die je rund die Hälfte der PZ enthalten. Man kann das für $D = 1, 2, 3$ im Bereich bis 100 000, für $D = 7$ im Bereich bis 10 000 an Hand der Tabelle von CUNNINGHAM (1904) durch Abzählen kontrollieren, die alle PZ bis 100 000 mit ihrer Zerlegungsmöglichkeit unter Verwendung von $D = 1, 2, 3$ resp. bis 10 000 mit $D = 7$ und $\kappa = 1$ enthält. Solche ausgedehnte Reihen (rund $\frac{1}{2}$ aller PZ) erhält man nur noch mit $D = 11, 19, 43, 67, 163$, wenn man ausserdem $\kappa = 4$ setzt.

Vor einiger Zeit wurden in Roy. Soc. Math. Tables V (herausgegeben von J. C. P. MILLER, Cambridge 1960) 8 weitere Reihen von PZ im Bereich bis 100 000 veröffentlicht, die zu den Werten $D = 5, 6, 10, 13$ mit $\kappa = 1$ und $\kappa = 2$ gehören. Jede dieser Reihen enthält rund $\frac{1}{4}$ aller PZ, je zwei mit demselben D -Wert ($\kappa = 1$ und 2) verschiedene, zusammen also rund $\frac{1}{2}$ aller PZ.

Es erheben sich nun folgende Fragen:

1. Werden durch die 3 Reihen von CUNNINGHAM ($D = 1, 2, 3$) alle PZ bis 100 000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 1195 werden nicht erfasst, von ihnen gehören $1195 - 601 = 594$ in die Reihe $D = 7$.

2. Werden durch die 8 Reihen der Roy. Soc. alle PZ bis 100 000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 617 werden nicht erfasst, von ihnen gehören 318 zur Reihe $D = 1$, zwei (nämlich $52963 = 49^2 + 2 \cdot 159^2$ und $81371 = 267^2 + 2 \cdot 71^2$) zur Reihe $D = 2$. Die restlichen 297 PZ enden sämtlich bemerkenswerter Weise auf 1 oder 9 mit ungerader vorletzter Ziffer und gehören den Reihen an: $120\lambda + 71$ oder $+ 119$, wenn λ eine ganze positive Zahl ist, also nicht den Reihen mit $D = 1, 2$ oder 3.

3. Sind die unter (1) genannten 601 PZ in den PZ enthalten, die zu $\kappa = 4$ und $D = 11, 19, 43, 67$ oder 163 gehören, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: Einige wenige (19) sind nicht darin enthalten.

Die unter (2) genannten 297 PZ mit ihrer Zerlegung sind von mir in einer Tabelle zusammengefasst, die mit Erläuterungen in der Bibliothek der Bergakademie Clausthal hinterlegt ist. Diese Tabelle stellt offenbar eine Ergänzung der Tabellen von CUNNINGHAM und Roy. Soc. dar; denn zusammen gestatten sie nun, die Zerlegung jeder PZ bis 100 000 unmittelbar abzulesen. – Die unter (1) und (3) genannten PZ sind von mir mit Zerlegung in einer zweiten Tabelle mitgeteilt, die sich ebenfalls am angegebenen Orte befindet. (Je ein weiteres Exemplar wird der Bibliothek der TH Hannover und der Roy. Soc. Cambridge übersandt).