Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 6

Rubrik: Ungelöste Probleme

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Ungelöste Probleme

Nachtrag zu Nr. 46 (El. Math. *18*, S. 85). Die Stufe s eines (nicht formalreellen) Körpers K war definiert als die kleinste Zahl, so dass -1 Summe von s Quadraten aus K ist. Die Herren J. W. S. CASSELS (Cambridge) und A. PFISTER (München) haben gezeigt, dass s stets eine Potenz von 2 sein muss, und dass andererseits jede Zweierpotenz wirklich Stufe eines Körpers ist. Die (bisher unveröffentlichten) Beweise verwenden nur Grundkenntnisse der Algebra. Der entscheidende Hilfssatz von J. W. S. CASSELS lautet: Ist das Polynom $f(x) \in K[x]$ Summe von n Quadraten aus dem Körper $K(x)$, so ist $f(x)$ auch Summe von n Quadraten aus dem Polynomring $K[x]$.

H. LENZ

Kleine Mitteilungen

Notiz über Primzahlreihen

Primzahlen (PZ) p sind in der Form $\varkappa p = a^2 + D b^2$ darstellbar, worin $\varkappa$ eine kleine Zahl $(1, 2, 4 \ldots)$ sein kann, a, b, D ganze positive Zahlen bedeuten. Zu jeder Kombination $\varkappa$, D gehört eine mehr oder weniger ausgedehnte Reihe von PZ (mit verschiedenen a und b). Für $\varkappa = 1$, $D = 1$ enthält die Reihe zum Beispiel im Bereich bis 100000 rund die Hälfte aller 9592 PZ (man beachte, dass diese PZ der arithmetischen Reihe $4\lambda + 1$ angehören und es rund ebenso viele PZ in der arithmetischen Reihe $4\lambda + 3$ geben muss, λ eine ganze positive Zahl). Auch $D = 2, 3, 7$ liefern mit $\varkappa = 1$ Reihen, die je rund die Hälfte der PZ enthalten. Man kann das für $D = 1, 2, 3$ im Bereich bis 100000, für $D = 7$ im Bereich bis 10000 an Hand der Tabelle von CUNNINGHAM (1904) durch Abzählen kontrollieren, die alle PZ bis 100000 mit ihrer Zerlegungsmöglichkeit unter Verwendung von $D = 1, 2, 3$ resp. bis 10000 mit $D = 7$ und $\varkappa = 1$ enthält. Solche ausgedehnte Reihen (rund $^1/_2$ aller PZ) erhält man nur noch mit $D = 11, 19, 43, 67, 163$, wenn man ausserdem $\varkappa = 4$ setzt.

Vor einiger Zeit wurden in Roy. Soc. Math. Tables V (herausgegeben von J. C. P. MILLER, Cambridge 1960) 8 weitere Reihen von PZ im Bereich bis 100000 veröffentlicht, die zu den Werten $D = 5, 6, 10, 13$ mit $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ gehören. Jede dieser Reihen enthält rund $^1/_4$ aller PZ, je zwei mit demselben D-Wert ($\varkappa = 1$ und 2) verschiedene, zusammen also rund $^1/_2$ aller PZ.

Es erheben sich nun folgende Fragen:

1. Werden durch die 3 Reihen von CUNNINGHAM ($D = 1, 2, 3$) alle PZ bis 100000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 1195 werden nicht erfasst, von ihnen gehören $1195 - 601 = 594$ in die Reihe $D = 7$.

2. Werden durch die 8 Reihen der Roy. Soc. alle PZ bis 100000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 617 werden nicht erfasst, von ihnen gehören 318 zur Reihe $D = 1$, zwei (nämlich $52963 = 49^2 + 2 \cdot 159^2$ und $81371 = 267^2 + 2 \cdot 71^2$) zur Reihe $D = 2$. Die restlichen 297 PZ enden sämtlich bemerkenswerter Weise auf 1 oder 9 mit ungerader vorletzter Ziffer und gehören den Reihen an: $120\lambda + 71$ oder $+ 119$, wenn λ eine ganze positive Zahl ist, also nicht den Reihen mit $D = 1, 2$ oder 3.

3. Sind die unter (1) genannten 601 PZ in den PZ enthalten, die zu $\varkappa = 4$ und $D = 11, 19, 43, 67$ oder 163 gehören, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: Einige wenige (19) sind nicht darin enthalten.

Die unter (2) genannten 297 PZ mit ihrer Zerlegung sind von mir in einer Tabelle zusammengefasst, die mit Erläuterungen in der Bibliothek der Bergakademie Clausthal hinterlegt ist. Diese Tabelle stellt offenbar eine Ergänzung der Tabellen von CUNNINGHAM und Roy. Soc. dar; denn zusammen gestatten sie nun, die Zerlegung jeder PZ bis 100000 unmittelbar abzulesen. – Die unter (1) und (3) genannten PZ sind von mir mit Zerlegung in einer zweiten Tabelle mitgeteilt, die sich ebenfalls am angegebenen Orte befindet. (Je ein weiteres Exemplar wird der Bibliothek der TH Hannover und der Roy. Soc. Cambridge übersandt).