

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 2

PDF erstellt am: **25.04.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 423.** Wie muss die Matrix  $\mathfrak{A} = (a_{ik})$  einer Affinität  $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{A} \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$  beschaffen sein, damit es in der Ebene vier (durch ihre Ortsvektoren  $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$  gegebene) Punkte gibt, die durch die Affinität in der angegebenen Reihenfolge zyklisch aufeinander abgebildet werden?  
W. JÄNICHEN, Berlin

*Lösung:* Aus dem Ansatz (die Indizes im folgenden modulo 4 gerechnet):  $\mathfrak{p}_{j+1} = \mathfrak{A} \mathfrak{p}_j + \mathfrak{a}$  folgt durch Differenzbildung

$$\mathfrak{p}_{j+1} - \mathfrak{p}_{j-1} = \mathfrak{A} (\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_{j-2}) = \mathfrak{A}^2 (\mathfrak{p}_{j-1} - \mathfrak{p}_{j-3}) = \mathfrak{A}^2 (\mathfrak{p}_{j-1} - \mathfrak{p}_{j-1})$$

oder

$$(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) (\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1) = \mathfrak{o}, \quad (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) (\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_0) = \mathfrak{o}. \quad (\mathfrak{o} = \text{Nullvektor})$$

Wir wollen voraussetzen, dass mindestens einer der Vektoren  $\mathfrak{p}_3 - \mathfrak{p}_1$  und  $\mathfrak{p}_2 - \mathfrak{p}_0$  vom Nullvektor verschieden ist (allgemeiner Fall). Dann ergibt sich als notwendige Bedingung für die Matrix  $\mathfrak{A}$ :

$$|\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}| = 0.$$

Diese Bedingung ist auch hinreichend für die Existenz von Punkten  $\mathfrak{p}_j$  der beschriebenen Art.

Es sei nämlich  $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{A} \mathfrak{p} + \mathfrak{a}$  ( $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ) eine Affinität mit  $|\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}| = 0$ . Dann hat das Gleichungssystem  $(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) \mathfrak{z} = \mathfrak{o}$  eine ein- oder zweiparametrische Lösungsmannigfaltigkeit. Ist  $\mathfrak{z}_0$  eine beliebige Lösung des Systems, so ordnen wir ihr durch den Ansatz  $\mathfrak{z}_0 = (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{E}) \mathfrak{p} + \mathfrak{A} \mathfrak{a} + \mathfrak{a}$  in eindeutiger Weise einen Punkt  $\mathfrak{p}$  der Ebene zu (aus  $|\mathfrak{A}| \neq 0$  und  $|\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}| = 0$  folgt, wie man sich leicht überlegt:  $|\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{E}| \neq 0$ ). Nun ist

$$(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) \mathfrak{z}_0 = \mathfrak{o} = (\mathfrak{A}^4 - \mathfrak{E}) \mathfrak{p} + (\mathfrak{A}^3 + \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A} + \mathfrak{E}) \mathfrak{a}$$

oder

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A} \{ \mathfrak{A} \{ \mathfrak{A} \{ \mathfrak{A} \mathfrak{p} + \mathfrak{a} \} + \mathfrak{a} \} + \mathfrak{a} \} + \mathfrak{a}.$$

Man erkennt, dass  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$  oder  $\mathfrak{p} = \mathfrak{A} \mathfrak{p}_0 + \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1$  oder  $\mathfrak{p} = \mathfrak{A} \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_2$  oder  $\mathfrak{p} = \mathfrak{A} \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{a} = \mathfrak{p}_3$  gesetzt werden kann. Die Lösungsmannigfaltigkeit des Systems  $(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) \mathfrak{z} = \mathfrak{o}$  ist von derselben Dimension wie die Mannigfaltigkeit der Punkte  $\mathfrak{p}_j$ . Die Punktquadrupel  $(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3)$  erfüllen daher entweder vier (nicht notwendig verschiedene) Geraden ( $\text{Rang}(\mathfrak{E} + \mathfrak{A}^2) = 1$ ) oder die ganze Ebene ( $\text{Rang}(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{E}) = 0$ , das heisst  $\mathfrak{A}^2 = -\mathfrak{E}$ ).  
G. GEISE, Dresden

C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht) und O. REUTTER (Ochsenhausen) geben als spezielle Lösung die reellen Matrizen mit den Eigenwerten  $\pm i$  an.

**Aufgabe 424.** Es bezeichne  $A(a_i)$  das arithmetische,  $H(a_i)$  das harmonische Mittel der drei Seiten eines Dreiecks und  $G(w_i)$  das geometrische Mittel der drei Winkelhalbierenden. Wie gross ist die Fläche des Dreiecks, wenn

$$G^3(w_i) \left[ \frac{3}{H(a_i)} - \frac{1}{3 A(a_i)} \right] = 3?$$

F. LEUENBERGER, ZUOZ

*Lösung:* Ist  $s$  der halbe Dreiecksumfang, so erhält man mittels der Identität

$$(a_1 + a_2 + a_3) (a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1) - a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2) (a_2 + a_3) (a_3 + a_1)$$

sofort

$$G^3(w_i) \left[ \frac{3}{H(a_i)} - \frac{1}{3 A(a_i)} \right] = w_1 w_2 w_3 \frac{(a_1 + a_2) (a_2 + a_3) (a_3 + a_1)}{2 s a_1 a_2 a_3} = 3.$$

Setzt man

$$w_1 = \frac{\sqrt{a_2 a_3 [(a_2 + a_3)^2 - a_1^2]}}{a_2 + a_3} = \frac{2 \sqrt{a_2 a_3 s (s - a_1)}}{a_2 + a_3}$$

und die durch zyklische Vertauschung der  $a_i$  entstehenden Ausdrücke für  $w_2$  und  $w_3$  ein, so ergibt sich

$$4 \sqrt{s (s - a_1) (s - a_2) (s - a_3)} = 3.$$

Nach der Formel von Heron ist somit  $F = 3/4$ .

Lösungen sandten F. BACHMANN (Zürich), B. BOLLOBÁS (Budapest), K. FIEDLER (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin), H. MEILI (Winterthur), W. ZULLIGER (Küsnacht ZH).

**Aufgabe 425.** Man beweise folgenden Satz über quadratische Matrizen mit  $n^2 \geq 1$  Elementen: Die Matrizen  $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_r$  ( $r \geq 0$ ) sollen konstante, komplexwertige Elemente besitzen. Das Polynom  $\mathfrak{P}(x) = \sum_{e=0}^r \mathfrak{A}_e x^e$  ist dann eine Matrix, deren Elemente Polynome in  $x$  sind. Die Determinante dieser Matrix sei  $f(x) = |\mathfrak{P}(x)|$ . Wenn es nun eine konstante Matrix  $\mathfrak{X}$  derart gibt, dass  $\mathfrak{P}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$  ist, dann ist auch  $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$ .  $\mathfrak{O}$  bedeutet dabei die Nullmatrix.

(Es ist zu beachten, dass im allgemeinen  $f(\mathfrak{X}) \neq |\mathfrak{P}(\mathfrak{X})|$  ist, weil das Bilden der Determinante einer Matrix und das «Einsetzen» einer Matrix in ein abstraktes Polynom nicht-vertauschbare Operationen sind.) O. REUTTER, Ochsenhausen/Deutschland

*Lösung:* Ist  $f(x) \equiv 0$ , dann ist nichts zu beweisen. Sei also  $f(x) \not\equiv 0$ . – Bekanntlich gibt es eine Matrix  $\mathfrak{Q}(x)$ , die zu  $\mathfrak{P}(x)$  adjungierte Matrix, so dass identisch gilt:

$$\mathfrak{P}(x) \mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}(x) \mathfrak{P}(x) = f(x) \mathfrak{E} \quad (\mathfrak{E} = \text{Einheitsmatrix}).$$

$f(x) \mathfrak{E}$  ist ebenfalls ein Matrixpolynom wie  $\mathfrak{P}(x)$ . Der «rechte» Wert des Polynoms  $\mathfrak{P}(x)$  für  $x = \mathfrak{X}$  ist gleich  $\mathfrak{O}$ . Das ist nach dem verallgemeinerten Satz von Bézout (vgl. F. R. Gantmacher, Matrizenrechnung I, Berlin 1958, S. 77f.) genau dann der Fall, wenn das Polynom  $x \mathfrak{E} - \mathfrak{X}$  das Polynom  $\mathfrak{P}(x)$  von rechts ohne Rest teilt. Dann ist aber auch das Polynom  $\mathfrak{Q}(x) \mathfrak{P}(x)$ , also das Polynom  $f(x) \mathfrak{E}$  von rechts ohne Rest durch  $x \mathfrak{E} - \mathfrak{X}$  teilbar. Somit ist  $f(\mathfrak{X}) = \mathfrak{O}$ . G. GEISE, Dresden

Der Aufgabensteller weist darauf hin, dass der Satz der Aufgabe eine Verallgemeinerung des Cayleyschen Satzes ist, nach dem jede quadratische Matrix  $\mathfrak{A}$  ihrer charakteristischen Gleichung  $f(x) = |\mathfrak{A} - x \mathfrak{E}| = 0$  genügt.

**Aufgabe 426.** Es seien  $r_1, r_2, \dots, r_{(p-1)/2}$  die  $(p-1)/2$  quadratischen Reste mod  $p$  ( $p = \text{Primzahl}$ ). Ist  $r$  ein fester dieser Reste, so ergeben die mod  $p$  kleinsten positiven Reste der Produkte  $r r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, (p-1)/2$ ) wiederum das System der Reste  $r_i$ . Ordnen wir dem Rest  $r$  die Permutation  $P_r$  zu, die  $r_i$  in  $r r_i$  ( $i = 1, 2, \dots, (p-1)/2$ ) überführt, so bilden die  $P_r$  eine Gruppe  $\mathfrak{R}$  der Ordnung  $(p-1)/2$ . Es soll gezeigt werden: Ist  $p = 4k + 3$ , so sind alle Permutationen von  $\mathfrak{R}$  gerade, ist  $p = 4k + 1$ , so ist die Hälfte der Permutationen von  $\mathfrak{R}$  gerade, die andere Hälfte ungerade. W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

*Lösung:* Nach Definition heisst eine Permutation der  $n$  Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  gerade bzw. ungerade, wenn sie das Differenzenprodukt

$$\Delta = \prod_{i < k} (x_i - x_k)$$

in sich bzw. in  $-\Delta$  überführt. Werden anstelle der  $n$  Variablen  $x_i$  die  $(p-1)/2$  Reste  $r_i$  gesetzt, so geht  $\Delta$  durch die Permutation  $P_r$  über in

$$\Delta' = \prod_{i < k} r (r_i - r_k) \equiv r^E \Delta \pmod{p}, \quad E = \frac{1}{2} \frac{p-1}{2} \left( \frac{p-1}{2} - 1 \right).$$

Ist  $w$  eine Primitivwurzel mod  $p$ , so können die Reste  $r_t$  durch  $r_t = w^{2t}$  ( $t = 1, 2, \dots, (p-1)/2$ ) dargestellt werden.

a)  $p = 4k + 3$ . Man hat

$$r^E = r_i^E = [w^{p-1}]^{tk} \equiv 1 \pmod{p} \text{ für jedes } t,$$

also ist  $\Delta' = \Delta$  und alle Permutationen  $P_r$  sind gerade.

b)  $p = 4k + 1$ . Man hat hier

$$r_i^E = [w^{(p-1)/2}]^{(2k-1)i} \equiv (-1)^{(2k-1)i} \pmod{p}.$$

Somit ist  $r_{2s}^E \equiv 1$  und  $r_{2s+1}^E \equiv -1 \pmod{p}$  und die entsprechenden Permutationen sind gerade bzw. ungerade, was zu beweisen war. H. MEILI, Winterthur

Weitere Lösungen sandten W. BÖRNER (Jena) und L. CARLITZ (Duke University, Durham, N.C., USA).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 448.** Es sind jene logarithmischen Spiralen zu ermitteln, die ihre eigenen Affinevoluten darstellen. W. WUNDERLICH, Wien

**Aufgabe 449.** Die Dezimalbruchentwicklungen des Cosinus eines Winkels und des doppelten Winkels lauten

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= 0, abbb\dots \\ \cos 2\alpha &= 0, baaa\dots, a \neq b. \end{aligned}$$

Man bestimme  $a$  und  $b$ .

W. LÜSSY, Winterthur

**Aufgabe 450.** Es sei  $1 < a_1 < a_2 \dots < a_k$  eine Folge natürlicher Zahlen  $\leq n$ , von denen keine durch eine andere Zahl der Folge teilbar ist. Die Folge sei in dem Sinn «maximal», dass keine weiteren Zahlen  $\leq n$  hinzugefügt werden können. (Ein Beispiel für  $n = 12$  ist 4, 6, 7, 9, 10, 11). Man zeige:

$$\min k = \pi(n) = \text{Anzahl der Primzahlen } \leq n. \quad (1)$$

$$\min \sum_{i=1}^k 1/a_i = \sum_{j=[n/2]+1}^n 1/j. \quad (2)$$

P. ERDÖS

**Aufgabe 451.** Auf einer schiefen Ebene lässt man eine massive Kugel und eine massive Pseudosphäre längs einer Falllinie abrollen.  $v_K$  und  $v_P$  seien die Rollgeschwindigkeiten in dem Punkt, dessen Höhenunterschied zum Ausgangspunkt  $h$  beträgt.  $v_{HK}$  bzw.  $v_{HP}$  seien die Rollgeschwindigkeiten für die entsprechenden Hohlkörper (Wandstärke  $\rightarrow 0$ ). Man berechne die Verhältnisse  $v_K : v_{HK}$ ,  $v_P : v_{HP}$ ,  $v_P : v_K$ ,  $v_{HP} : v_{HK}$ . K. WANKA, Wien

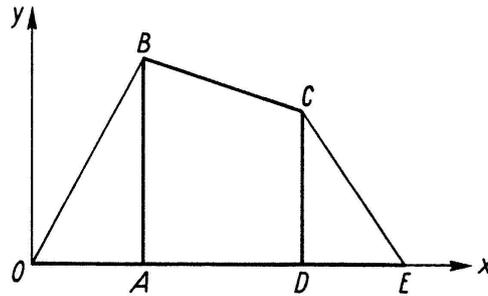
**Aufgabe 452.** Durch die Eckpunkte  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) eines konvexen Vierecks werden in der Ebene vier Geraden bestimmt.  $M_{i+2} = M_k$  ( $i + 2 \equiv k \pmod{4}$ ) sei der Fusspunkt des von einem Punkt  $P$  der Ebene auf  $A_i A_{i+1}$  gefällten Lotes. Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte  $P$ , für die  $\overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4}$ . (Ähnliche Aufgaben ergeben sich, indem man dem Viereck  $M_1 M_2 M_3 M_4$  andere Eigenschaften vorschreibt.)

J. BREJCHA, Brno

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die Potenzkurve  $y = kx^n$  hat die Eigenschaft, dass die Strecke der Tangente zwischen den Koordinatenachsen durch den Berührungspunkt im Verhältnis  $-1 : n$  geteilt wird. ( $XP : PY = -1 : n$ .) Zeige, dass auch die Umkehrung dieses Satzes richtig ist.



2. Die Punkte der Figur haben folgende Koordinaten:  $A(x; 0)$   $B(x; b)$   $C(x + a; c)$   $D(x + a; 0)$   $E(w; 0)$ .

Das Trapez ist das Profil einer Werkzeugkiste, die auf der Brücke  $OE$  eines Wagens steht. Sie soll durch ein Seil  $OBCE$  gegen Verschiebungen in der  $x$ -Richtung gesichert werden. Wie ist  $x$  zu wählen, damit das Seil nicht locker werden kann? Wie kann das Resultat ungeschultem Personal vermittelt werden?

►  $x = \frac{(w - a) b}{b + c}$ . Die Winkel bei  $O$  und  $E$  müssen gleich sein.

3. Der Kreis  $x^2 + y^2 = r^2$  schneidet die  $x$ -Achse in  $B(-r; 0)$ . Der Punkt  $A$  wandert auf dem Kreis. Man projiziert  $A$  nach  $C$  auf der  $x$ -Achse,  $C$  nach  $D$  auf  $BA$ , und  $D$  nach  $P$  auf  $AC$ . Bestimme die Gleichung des geometrischen Ortes von  $P$  und die von dieser Kurve eingeschlossene Fläche.

►  $y = \frac{r + x}{2r} \sqrt{r^2 - x^2}$  (Zwiebelkurve).  $f = \frac{\pi}{2} r^2$ .

4. Graphisch darzustellen:

$$\rho = \sqrt{\frac{\sin 3\varphi}{\cos \varphi}} \quad (\text{Polarkoordinaten}).$$

Die Kurve besitzt Schleifen, berechne die Fläche einer Schleife.

►  $\varphi = n \frac{\pi}{3}$  Wendetangenten,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  Asymptote,  $f = 0,75 - \ln \sqrt{2}$ .

5. An welcher Stelle ist die Kurve mit der Gleichung  $y = \operatorname{arctg} x$  am stärksten gekrümmt?

► Die Aufgabe führt auf die Gleichung

$$3x^6 + 5x^4 - 2x^2 - 2 = 0.$$

$$x^2 = 0,69152, \quad x = \pm 0,8316, \quad y = \pm 0,6937 + n\pi.$$

## Bericht

### Die Studientagung des Vereins Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer am 1. 12. 62 in Biel

Eine ausserordentlich grosse Zahl von Mitgliedern des VSM hat der Einladung zur Bieler Studientagung Folge geleistet. Das darf wohl als deutliches Zeichen des grossen Interesses gewertet werden, das in weiten Kreisen den Bestrebungen der beiden Lehrmittelkommissionen (der welschen und der deutschen Schweiz) entgegengebracht wird, durch Modernisierung des bisherigen Unterrichtswerkes, bzw. durch Schaffung neuer Leitfäden die notwendigen Hilfsmittel für einen zeitgemässen Mathematikunterricht zu schaffen.

Der Präsident des Vereins, Prof. W. SÖRENSEN, übergab zuerst das Wort Herrn Prof. A. PFLUGER von der ETH, der für die Lehrmittelkommission der deutschen Schweiz über die Neugestaltung des Stoffes «Algebra-Analysis» sprach. Da eine Darstellung der allge-