

# Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

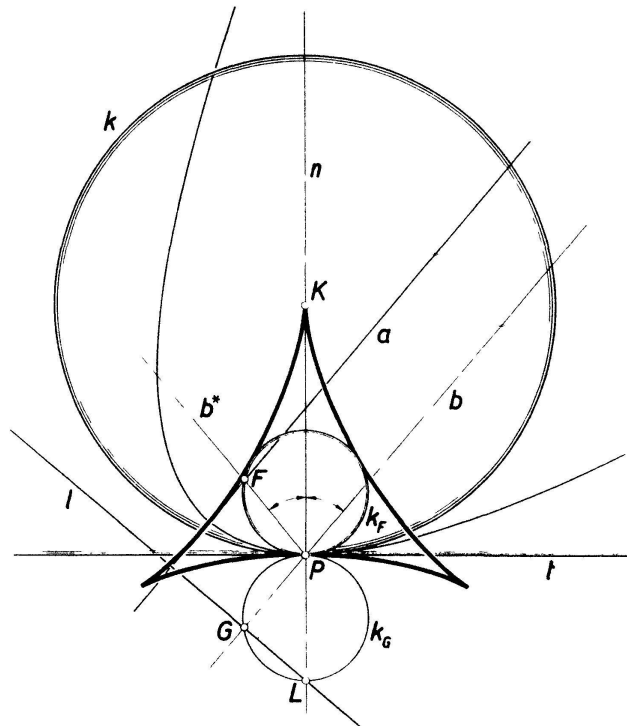
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.



Mit der Wahl der Achsenrichtung durch den Brennstrahl  $b = [GP]$  ist jeweils eine Parabel der Oskulationsschar bestimmt. Die Parabelachse  $a$  können wir nun nach der folgenden Vorschrift  $\mathfrak{B}$  finden:

Durch Spiegelung des Brennstrahles  $b$  an der Kurvennormalen  $n$  im Punkte  $P$  erhalten wir den zweiten Brennstrahl  $b^*$ , der den Kreis  $k_F$  im Brennpunkt  $F$  schneidet. Die Parabelachse  $a$  ist die durch  $F$  gehende Parallele zu  $b$ .

Damit ist aber bereits gezeigt, dass die Parabelachsen  $a$  eine dreispitzige Hypozykloide einhüllen. Lassen wir nämlich die Gerade  $b$  das Büschel  $P(b)$  durchlaufen, so stimmt die Vorschrift  $\mathfrak{B}$  mit der von H. SCHRÖTER stammenden Definition dieser Kurve überein (vgl. [3]).

W. KICKINGER, Wien

#### LITERATURHINWEISE

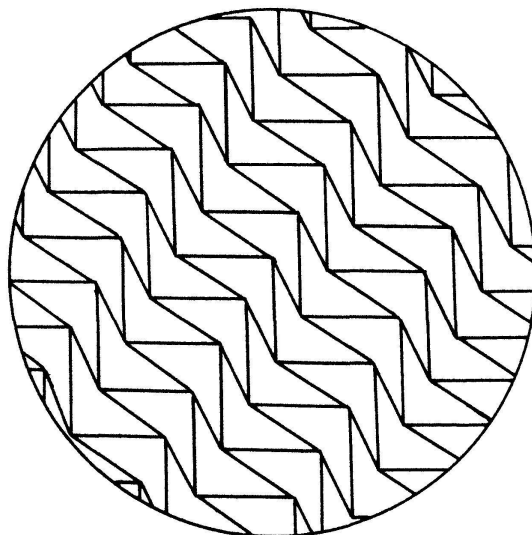
- [1] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, Periodico Mat. IV. Ser. 38 (1960), 155–158.
- [2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata*, Archimede 12 (1960), 253–256.
- [3] H. SCHRÖTER, *Über die Erzeugung krummer projektivischer Gebilde*, CRELLE-J. 54 (1857), 31.

## Ungelöste Probleme

Nr. 45. Es sei  $n \geq 2$  und  $P$  ein kompaktes Polyeder des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes, und es sei möglich, den ganzen Raum mit abzählbar unendlich vielen mit  $P$  kongruenten Polyedern zu parkettieren. Unter einer Parkettierung verstehen wir eine Überdeckung des Raumes durch Polyeder, die paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Gitterförmige Anordnung der Polyeder ist in unserem Fall nicht verlangt. Im Gegensatz zu der innerhalb des vorliegenden Problemkreises in der Regel üblichen Einschränkung braucht  $P$  nicht notwendigerweise konvex zu sein und darf auch als unzusammenhängend angenommen werden. Unsere Abbildung

zeigt eine Parkettierung der Ebene mit nichtkonvexen Vierecken. – Es scheint nun, dass der folgende Satz gilt:

*Ein Polyeder  $P$  mit der Parkettierungseigenschaft ist im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich mit einem Würfel  $W$ .*



Zwei Polyeder  $A$  und  $B$  heißen im Sinne der Elementargeometrie zerlegungsgleich, geschrieben  $A \sim B$ , wenn sie elementargeometrisch in gleich viele und paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegt werden können.

Für das Bestehen der oben vermuteten Zerlegungsgleichheit  $P \sim W$  gibt es in der Tat zahlreiche Indizien. So trifft sie insbesondere in verschiedenen Sonderfällen zu. Ist  $n = 2$ , so ist der Satz trivial richtig, da nach einem altbekannten Sachverhalt flächengleiche Polygone stets zerlegungsgleich sind, so dass insbesondere jedes Polygon mit einem Quadrat zerlegungsgleich ist. Für  $n = 3$  ist besonders im Fall der Raumparkettierung mit translationsgleichen konvexen Polyedern viel bekannt. Unter einem Paralleloeder versteht man hier ein konvexes Polyeder, das die Eigenschaft besitzt, eine Parkettierung des Raumes zu ergeben, wenn man translationsgleiche Exemplare längs übereinstimmender Seitenflächen aneinander legt<sup>1)</sup>. Nach klassischen Ergebnissen von H. MINKOWSKI<sup>2)</sup> und B. N. DELAUNAY<sup>3)</sup> sind die Paralleloeder totalsymmetrisch, das heißt sie und alle ihre Seitenflächen weisen Zentralsymmetrie auf. Es gibt bekanntlich fünf Paralleloedertypen. Kürzlich hat H. S. M. COXETER eine kurze Herleitung dieser Typen gegeben<sup>4)</sup>. Die folgende Tafel enthält zu jedem Typ einen besonderen Vertreter:

Typ	Polyeder	Berandung
1	Würfel	6 Quadrate
2	Sechseckiges Prisma	2 Sechsecke; 6 Rechtecke
3	Rhombendodekaeder	12 Rhomben
4	Verlängertes Rhombendodekaeder	4 Sechsecke; 8 Rhomben
5	Kubooktaeder (Koloctaeder)	8 Sechsecke; 6 Quadrate

<sup>1)</sup> Vgl. hierzu A. D. ALEXANDROW, *Konvexe Polyeder*; Akademie Verlag, Berlin 1958, Kap. 8, S. 308–317.

<sup>2)</sup> *Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper*. Ges. Abh. Leipzig-Berlin 1911, Bd. 2, S. 3–42.

<sup>3)</sup> *Sur la théorie des paralléloèdres*. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 183, 464–467, 1926.

<sup>4)</sup> *The classification of zonohedra by means of projective diagrams*; Vortrag an der Tagung über diskrete Geometrie in Oberwolfach im Sommer 1962.

Für diese fünf Polyeder lässt sich die Zerlegungsgleichheit mit Würfeln direkt bestätigen. Allgemeiner gilt für beliebige totalsymmetrische konvexe Polyeder des gewöhnlichen Raumes, dass diese mit Würfeln sogar translativ-zerlegungsgleich sind, so dass die Teilpolyeder, welche die Zerlegungsgleichheit realisieren, nicht nur kongruent, sondern sogar translationsgleich sind<sup>5)</sup>. Im Falle  $n > 3$  scheinen verwickeltere Verhältnisse vorzuliegen. Allgemein für  $n \geq 2$  gültige und weitergreifende Resultate hat kürzlich H. GROEMER gewonnen<sup>6)</sup>. Er zeigte, dass bei einer Parkettierung des Raumes durch gleichmässig beschränkte Polyeder, die mit einem konvexen Polyeder  $P$  lediglich homothetisch sind, wieder auf die Zentralsymmetrie von  $P$  selbst und seiner Seitenflächen geschlossen werden kann. Ob hier im Falle  $n > 3$  noch die translative Zerlegungsgleichheit von  $P$  mit einem Würfel  $W$  besteht, ist fraglich. Herrn GROEMER verdanken wir den Hinweis<sup>7)</sup>, dass schon DELAUNAY vierdimensionale konvexe Polyeder angegeben hat, welche die Parkettierungseigenschaft aufweisen und deren zweidimensionale Kanten Dreiecke sind. Vgl. hierzu auch eine Vermerkung von COXETER<sup>8)</sup>. Diese Tatsache zeigt, dass die höher dimensionalen Paralleleeder nicht in dem Sinne totalzentralsymmetrisch sind, dass die Kanten aller Dimensionen diese gleiche Symmetrie besitzen, wie der Unterzeichnete fälschlicherweise annahm.

Bei dem hier vorgelegten Problem handelt es sich nun darum zu entscheiden, ob der oben formulierte Satz betreffend die Zerlegungsgleichheit von Parkettierungspolyedern mit Würfeln richtig ist oder nicht. H. HADWIGER

## Kleine Mitteilungen

### Einige Dreiecksungleichungen

Bei  $i = 1, 2, 3$  seien  $a_i, h_i, m_i$  und  $\alpha_i$  die Seiten, Höhen, Schwerelinien und Winkel eines Dreiecks mit  $r$  und  $R$  als In- und Umkreisradius. Es gilt die Abschätzung

$$\frac{\sqrt{3}}{R} \leq \sum_{i=1}^3 \frac{1}{a_i} \leq \frac{\sqrt{3}}{2r} \quad (1)$$

von KUBOTA [1]<sup>9)</sup> (linke Seite)/LEUENBERGER [2] (rechte Seite). Letzterer gab in Amer. Math. Monthly 1960, S. 692, erstmals

$$M_1(h) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_1(a) \quad (2)$$

an.  $M_k(x)$  bedeutet das  $k$ -te Potenzmittel der Grössen  $x_i$ , und (2) ist der rechten Seite von (1) äquivalent. Schliesslich zeigte MAKOWSKI [3], dass

$$\text{und} \quad \left. \begin{aligned} M_k(h) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_k(a) \\ M_{-k}(h) &\leq \frac{\sqrt{3}}{2} M_{-k}(a) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

<sup>5)</sup> Vgl. hierzu H. HADWIGER, *Mittelpunktpolyeder und translative Zerlegungsgleichheit*; Math. Nachr. 8, 53–58, 1953.

<sup>6)</sup> *Über Zerlegungen des euklidischen Raumes*; Math. Z. 79, 364–375, 1962.

<sup>7)</sup> Brief vom 26. 10. 1962.

<sup>8)</sup> J. de Math. 41, 125, 1962.

<sup>9)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 33.