Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über die Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement

Autor(en): **Kickinger, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 2

PDF erstellt am: **28.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22634

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Cas général. – Supposons la conique L donnée dans un système d'axes rectangulaires, par l'équation: $\varphi(x, y) = A\,x^2 + 2\,B\,x\,y + C\,y^2 + D\,x + E\,y + F = 0$. On sait qu'on peut toujours trouver, à l'aide d'une translation et d'une rotation, un système d'axes $O\,x$, $O\,y$ tels que l'on ait $\varphi(x, y) \equiv K\,f(x', y')$; identité dans laquelle on suppose que $f(x', y') = 0$ est l'équation canonique de L. Le calcul donne deux valeurs possibles $\frac{1}{2}\,(A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4\,B^2})$ de la constante K, et une discussion est nécessaire pour déterminer celle de ces valeurs qui convient. Supposons que K ait été ainsi choisi, et désignons par x_0', y_0' les coordonnées du point P dans le système $x'\,y'$. On sait que la puissance p de P vaut $f(x_0', y_0')$. D'autre part, $f(x_0', y_0') = \varphi(x_0, y_0)/K$. On a donc finalement la formule $p = \varphi(x_0, y_0)/K$ qu'on pourra utiliser dans les applications. Par exemple, le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques $\varphi_1(x, y) = 0$, et $\varphi_2(x, y) = 0$, est la courbe $\varphi_1(x, y)/K_1 = \varphi_2(x, y)/K_2$. C'est une nouvelle conique qui appartient au faisceau des deux premières.

Remarquons qu'il serait aisé de généraliser la définition donnée au début de la puissance d'un point par rapport à la courbe L, afin de l'étendre au cas où cette courbe est algébrique et de degré quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. HAUSSNER, *Analytische Geometrie der Ebene*. Sammlung Göschen Bd. 65, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1934.

[2] G. SALMON, *Géométrie analytique à deux dimensions*, 3ème édition, p. 161. Gauthier-Villars. Paris.

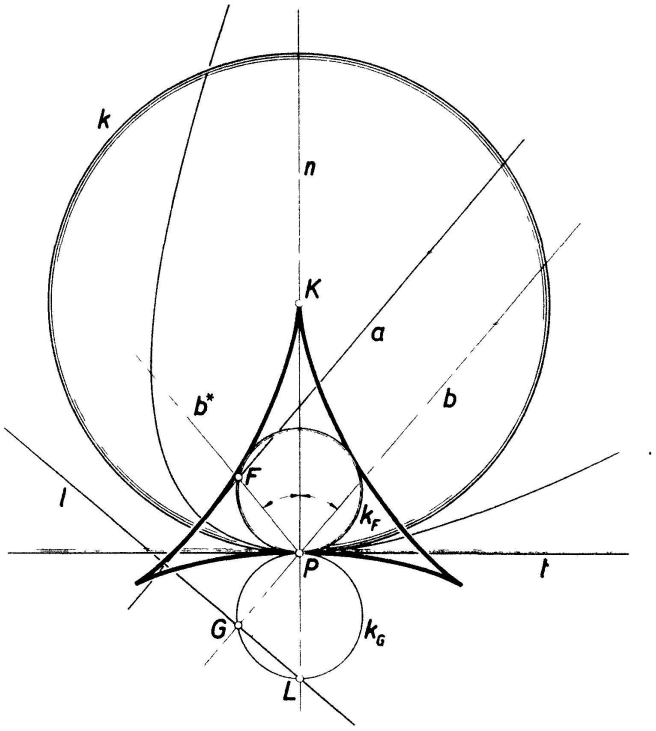
Einfacher Beweis eines Satzes von F. LAURENTI über die Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI stellt die Frage nach der Hüllkurve der Achsen aller Parabeln, die ein Krümmungselement gemeinsam haben; und findet eine dreispitzige Hypozykloide (Steinerzykloide) als Lösungskurve (vergleiche [1][1]) und [2]).

Dem von LAURENTI rein analytisch geführten Beweis soll hier ein synthetischer zur Seite gestellt werden; darüber hinaus wird gezeigt, dass die (eigentlichen) Brennpunkte der Parabeln auf einem Kreis liegen, der den vorgegebenen Krümmungskreis k im Oskulationspunkt von innen berührt und dessen Durchmesser gleich dem halben Radius von k ist.

Ist K die Krümmungsmitte eines beliebigen Punktes P einer Parabel und L der Schnittpunkt der Kurvennormalen in P mit der Leitlinie, dann gilt bekanntlich die Relation $2\overline{LP} = \overline{PK}$. Die Leitlinien l aller ∞^1 Parabeln mit dem gemeinsamen Krümmungselement (P, K) bilden daher das Büschel mit dem Scheitel L. Die Normalprojektionen G des Oskulationspunktes P auf die Geraden des Büschels $L(l)$ liegen auf dem Kreis k_G mit dem Durchmesser $\overline{PL}$. Diese Punkte G sind aber für die betrachteten Parabeln die Gegenpunkte der Brennpunkte F bezüglich der (festen) Tangente t im Punkte P. Die Brennpunkte F erfüllen somit den Kreis k_F, der durch orthogonale Spiegelung des Kreises k_G an t hervorgeht.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 29.



Mit der Wahl der Achsenrichtung durch den Brennstrahl $b = [GP]$ ist jeweils eine Parabel der Oskulationsschar bestimmt. Die Parabelachse a können wir nun nach der folgenden Vorschrift $\mathfrak{V}$ finden:

Durch Spiegelung des Brennstrahles b an der Kurvennormalen n im Punkte P erhalten wir den zweiten Brennstrahl b^*, der den Kreis k_F im Brennpunkt F schneidet. Die Parabelachse a ist die durch F gehende Parallele zu b.

Damit ist aber bereits gezeigt, dass die Parabelachsen a eine dreispitzige Hypozykloide einhüllen. Lassen wir nämlich die Gerade b das Büschel $P(b)$ durchlaufen, so stimmt die Vorschrift $\mathfrak{V}$ mit der von H. SCHRÖTER stammenden Definition dieser Kurve überein (vgl. [3]). W. KICKINGER, Wien

LITERATURHINWEISE

[1] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Periodico Mat. IV. Ser. *38* (1960), 155–158.
[2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Archimede *12* (1960), 253–256.
[3] H. SCHRÖTER, *Über die Erzeugung krummer projektivischer Gebilde*, CRELLE-J. *54* (1857), 31.

Ungelöste Probleme

Nr. 45. Es sei $n \geqq 2$ und P ein kompaktes Polyeder des n-dimensionalen euklidischen Raumes, und es sei möglich, den ganzen Raum mit abzählbar unendlich vielen mit P kongruenten Polyedern zu parkettieren. Unter einer Parkettierung verstehen wir eine Überdeckung des Raumes durch Polyeder, die paarweise höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Gitterförmige Anordnung der Polyeder ist in unserem Fall nicht verlangt. Im Gegensatz zu der innerhalb des vorliegenden Problemkreises in der Regel üblichen Einschränkung braucht P nicht notwendigerweise konvex zu sein und darf auch als unzusammenhängend angenommen werden. Unsere Abbildung