

Sur la puissance d'un point par rapport à un conique

Autor(en): **Loeffler, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 2

PDF erstellt am: **11.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22633>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XVIII Nr. 2 Seiten 25–48 Basel, 10. März 1963

Sur la Puissance d'un Point par Rapport à une Conique

Un cercle étant donné, dans un système d'axes rectangulaires, par son équation $F(x, y) = 0$, on sait que la puissance d'un point $P(x_0, y_0)$ par rapport à ce cercle est égale à l'expression $p = F(x_0, y_0)/A$, où A est le coefficient de x^2 dans le polynôme F . On sait de plus interpréter p géométriquement.

Par analogie, nous nous proposons d'appeler puissance d'un point par rapport à une conique $\varphi(x, y) = 0$, une expression de la forme $p = \varphi(x_0, y_0)/K$ où x_0 et y_0 sont les coordonnées du point et K une constante qu'on doit déterminer de façon à rendre p susceptible d'une interprétation géométrique.

Etant donnés, dans un plan, une conique L et un point quelconque P , L. HAUSSNER [1] considère le produit $z = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$ déterminé par une sécante issue de P qui coupe L en M et N . Il considère que z est la puissance de P par rapport à la conique. Elle aurait ainsi une infinité de valeurs car z varie lorsque la sécante tourne autour de P . Nous choisirons l'une d'entre elles comme étant la valeur de p , en adoptant la définition suivante:

Définition. – On appelle puissance p d'un point P par rapport à une conique L , la valeur du produit $\overline{PM} \cdot \overline{PN}$ qui est minimum en valeur absolue pour toutes les cordes MN de L passant par P .

Nous verrons que cette définition fait correspondre à tout point P une valeur de p unique, bien déterminée, et représentable géométriquement.

Pour cela, montrons d'abord qu'on obtient p en menant par P la sécante qui est perpendiculaire à l'axe de L sur lequel sont situés les foyers réels de la courbe. Prenons cet axe comme axe des x et sa médiatrice comme axe des y . Dans ce système, nous désignerons par $f(x, y) = 0$ l'équation de L , et nous admettrons que:

$$f(x, y) \equiv y^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2, \text{ si } L \text{ est une ellipse } (a^2 \geq b^2);$$

$$f(x, y) \equiv y^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} + b^2, \text{ si } L \text{ est une hyperbole};$$

$$f(x, y) \equiv y^2 - 2kx, \text{ si } L \text{ est une parabole.}$$

Nous appellerons $f(x, y) = 0$ l'équation canonique de L . Menons par $P(x_0, y_0)$ une sécante qui coupe L en M et N ; soit α l'angle qu'elle forme avec l'axe des x . Posons: $z = \overline{PM} \cdot \overline{PN}$. La sécante étant donnée par les équations: $x = x_0 + \rho \cos \alpha$, et $y =$

$y_0 + \rho \sin \alpha$, on trouve aisément, en cherchant son intersection avec L , l'expression de p . Par exemple, dans le cas où L est une ellipse, il vient :

$$z = \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}.$$

On peut utiliser la dérivée z'_α pour constater que, si le point P est extérieur à L , c'est-à-dire si $a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - a^2 b^2$ est positif, ainsi que z , cette fonction de α est minimum pour $\alpha = 90^\circ$. Si P est intérieur à L , z est négatif, et passe par un maximum pour $\alpha = 90^\circ$. Donc, quelle que soit la position de P , on peut dire que $|z|$ est minimum lorsque la sécante est perpendiculaire à l'axe des x , c.q.f.d.

En suivant une marche analogue, on aboutit aux mêmes conclusions sur le signe de z et sur le minimum de $|z|$ dans le cas où L est une hyperbole ou une parabole. La puissance de P étant la valeur de z qui correspond à $\alpha = 90^\circ$, on voit qu'elle a pour valeur, si L est une ellipse :

$$p = y_0^2 + \frac{b^2 x_0^2}{a^2} - b^2.$$

On trouve de même :

$$p = y_0^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2} + b^2 \quad \text{si } L \text{ est une hyperbole}$$

et

$$p = y_0^2 - 2 k x_0 \quad \text{si } L \text{ est une parabole.}$$

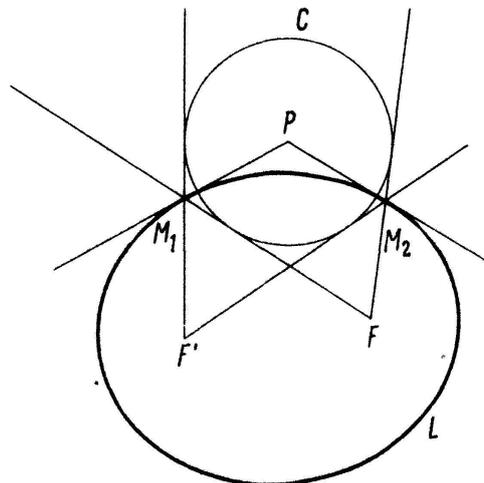
On a donc, dans tous les cas :

$$p = f(x_0, y_0)$$

Représentation géométrique. — Il peut arriver que la perpendiculaire à l'axe des foyers réels de L , menée par le point P , ne rencontre pas la courbe. Existe-t-il, dans ce cas une représentation géométrique de p ? Nous allons voir qu'il y en a une qui est valable pour tous les points P extérieurs à L . Menons, en effet, par un pareil point les tangentes à la conique. Soient M_1 et M_2 leurs points de contact. On peut énoncer les deux propositions suivantes :

I. — Les quatre rayons vecteurs qui passent par M_1 et M_2 sont tangents à un cercle C de centre P .

II. — Le carré du rayon de C est égal à la puissance de P par rapport à L .



Démonstration. – I. – Supposons que L soit une ellipse. Désignons par F et F' ses foyers. La tangente M_1P est la bissectrice extérieure de l'angle $F'M_1F$ et M_2P bissecte extérieurement l'angle $F'M_2F$. De plus, d'après PONCELET, FP est la bissectrice de l'angle M_1FM_2 . On en déduit que P est équidistant des droites FM_1 , FM_2 , $F'M_1$ et $F'M_2$. Ce point est donc bien le centre d'un cercle C tangent à ces quatre rayons vecteurs. Ce résultat s'établit d'une manière analogue si L est une hyperbole ou une parabole. Dans ce dernier cas, on doit observer qu'un des foyers est rejeté à l'infini. Quels que soient L et P , il existe un cercle C répondant à l'énoncé I. Nous désignerons son rayon par r .

II. – Pour démontrer la deuxième proposition, nous donnerons la conique L par son équation canonique $f(x, y) = 0$.

Supposons que L soit une ellipse. On a:

$$f(x, y) = y^2 + \frac{b^2 x^2}{a^2} - b^2.$$

On sait que le point

$$M \left(a \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2 b t}{1 + t^2} \right)$$

appartient à la courbe, quel que soit t . Soient t_1 et t_2 les valeurs de t correspondant aux points M_1 et M_2 . Si on les utilise pour écrire les équations des tangentes en ces points, et pour obtenir les coordonnées x_0, y_0 de leur point d'intersection P , on trouve:

$$x_0 = a \frac{1 - t_1 t_2}{1 + t_1 t_2}, \quad y_0 = b \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2}. \quad (1)$$

Formons l'équation de l'un des quatre rayons vecteurs de l'énoncé de I, par exemple, de celui qui passe par le foyer $F' (-c; 0)$ et le point

$$M_1 \left(a \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}, \frac{2 b t_1}{1 + t_1^2} \right).$$

En la mettant sous forme normale, et en y remplaçant x par x_0 et y par y_0 , on obtient $\pm r$, en vertu de I. On trouve, après quelques transformations:

$$r = b \left| \frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} \right|.$$

D'autre part, en remplaçant x_0 et y_0 par leurs expressions tirées de (1) dans $f(x_0, y_0)$, il vient:

$$f(x_0, y_0) = b^2 \left(\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} \right)^2.$$

Or, on a vu que $f(x_0, y_0) = p$. Donc la puissance du point P par rapport à L est égale à r^2 , c.q.f.d.

Le même résultat s'obtient d'une manière analogue dans le cas où L est une hyperbole qu'on pourra considérer comme lieu des points $M \left(\frac{a}{2} (t + 1/t), \frac{b}{2} (t - 1/t) \right)$. Dans le cas où L est une parabole, on trouve aisément $r^2 = y_0^2 - 2 k x_0$, donc aussi: $p = r^2$. Remarquons que, si L est un cercle, son équation canonique est: $f(x, y) = y^2 + x^2 - R^2 = 0$, car $a = b = R$. On a donc: $p = f(x_0, y_0) = y_0^2 + x_0^2 - R^2$, ou $p = \overline{OP^2} - R^2$. C'est bien là d'après STEINER, l'expression de la puissance du point P par rapport au cercle L [2]. On voit que le cercle C se confond ici avec le cercle de centre P qui est orthogonal à L , puisque son rayon $r = \sqrt{p} = \sqrt{\overline{OP^2} - R^2}$ est égal à la tangente menée de P à L .

Cas général. – Supposons la conique L donnée dans un système d'axes rectangulaires, par l'équation: $\varphi(x, y) = A x^2 + 2 B x y + C y^2 + D x + E y + F = 0$. On sait qu'on peut toujours trouver, à l'aide d'une translation et d'une rotation, un système d'axes $O x, O y$ tels que l'on ait $\varphi(x, y) \equiv K f(x', y')$; identité dans laquelle on suppose que $f(x', y') = 0$ est l'équation canonique de L . Le calcul donne deux valeurs possibles $\frac{1}{2} (A + C \pm \sqrt{(A - C)^2 + 4 B^2})$ de la constante K , et une discussion est nécessaire pour déterminer celle de ces valeurs qui convient. Supposons que K ait été ainsi choisi, et désignons par x'_0, y'_0 les coordonnées du point P dans le système $x' y'$. On sait que la puissance p de P vaut $f(x'_0, y'_0)$. D'autre part, $f(x'_0, y'_0) = \varphi(x_0, y_0)/K$. On a donc finalement la formule $p = \varphi(x_0, y_0)/K$ qu'on pourra utiliser dans les applications. Par exemple, le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux coniques $\varphi_1(x, y) = 0$, et $\varphi_2(x, y) = 0$, est la courbe $\varphi_1(x, y)/K_1 = \varphi_2(x, y)/K_2$. C'est une nouvelle conique qui appartient au faisceau des deux premières.

Remarquons qu'il serait aisé de généraliser la définition donnée au début de la puissance d'un point par rapport à la courbe L , afin de l'étendre au cas où cette courbe est algébrique et de degré quelconque.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. HAUSSNER, *Analytische Geometrie der Ebene*. Sammlung Göschen Bd. 65, W. de Gruyter, Berlin und Leipzig 1934.
 [2] G. SALMON, *Géométrie analytique à deux dimensions*, 3^{ème} édition, p. 161. Gauthier-Villars. Paris.

Einfacher Beweis eines Satzes von F. LAURENTI über die Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI stellt die Frage nach der Hüllkurve der Achsen aller Parabeln, die ein Krümmungselement gemeinsam haben; und findet eine dreispitzige Hypozykloide (Steinerzykloide) als Lösungskurve (vergleiche [1]¹⁾ und [2]).

Dem von LAURENTI rein analytisch geführten Beweis soll hier ein synthetischer zur Seite gestellt werden; darüber hinaus wird gezeigt, dass die (eigentlichen) Brennpunkte der Parabeln auf einem Kreis liegen, der den vorgegebenen Krümmungskreis k im Oskulationspunkt von innen berührt und dessen Durchmesser gleich dem halben Radius von k ist.

Ist K die Krümmungsmitte eines beliebigen Punktes P einer Parabel und L der Schnittpunkt der Kurvennormalen in P mit der Leitlinie, dann gilt bekanntlich die Relation $2\overline{LP} = \overline{PK}$. Die Leitlinien l aller ∞^1 Parabeln mit dem gemeinsamen Krümmungselement (P, K) bilden daher das Büschel mit dem Scheitel L . Die Normalprojektionen G des Oskulationspunktes P auf die Geraden des Büschels $L(l)$ liegen auf dem Kreis k_G mit dem Durchmesser \overline{PL} . Diese Punkte G sind aber für die betrachteten Parabeln die Gegenpunkte der Brennpunkte F bezüglich der (festen) Tangente t im Punkte P . Die Brennpunkte F erfüllen somit den Kreis k_F , der durch orthogonale Spiegelung des Kreises k_G an t hervorgeht.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 29.