

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 1

PDF erstellt am: **22.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

natensystems. Der Radius von  $K$  sei  $a$ ; die Koordinaten von  $S'$  seien  $(a, 0)$ . Für einen Kreis der Schar  $K(p)$  mit den Mittelpunktskoordinaten  $(\xi, \eta)$  gilt dann

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (a - \xi)^2 + \eta^2. \quad 13$$

Mit  $\xi = a \cos \varphi$ ,  $\eta = a \sin \varphi$  ergibt sich daraus die Gleichung der Kurvenschar

$$F(x, y, \varphi) = x^2 + y^2 - a^2 - 2a[(x - a) \cos \varphi + y \sin \varphi] = 0.$$

Zusammen mit der weiteren Bedingung für die Hüllkurve

$$F_\varphi = 2a[(x - a) \sin \varphi - y \cos \varphi] = 0$$

folgt durch einfache Elimination von  $\varphi$  die gesuchte Gleichung:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4a^2((x - a)^2 + y^2).$$

Dies ist aber bekanntlich die Gleichung der Kardioide mit der Spitze in  $S' = (a, 0)$ .

7. Allgemein ist jeder Punkt einer Hüllkurve Berührungspunkt mit einer Kurve der Schar, hier also einem Kreise  $K(p)$ . Also ist nach 3. jeder Punkt der Kardioide ein  $X$ -Punkt.

Man kann sich leicht überlegen, dass jeder Punkt  $P$  innerhalb der Hüllkurve – der also nicht auf der Kardioide selbst liegt – auf genau zwei verschiedenen Kreisen  $K(p)$  liegt, nach 3. jedenfalls ein  $X$ -Punkt ist. Um dies zu sehen, errichte man auf der Verbindungsstrecke  $\overline{PS'}$  die Mittelsenkrechte. Deren zwei Schnittpunkte mit  $K$  liefern nach 5. die Mittelpunkte  $M(p)$  für die in Frage kommenden Kreise  $K(p)$ .

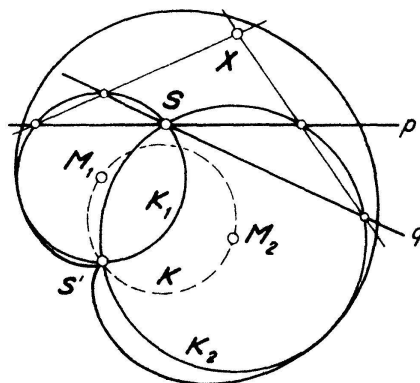
Andererseits ist der Schnittpunkt zweier adjungierter Sekanten, die keine adjungierten Tangenten sind, der Schnittpunkt zweier verschiedener Kreise der Schar, liegt daher nicht auf der Hüllkurve, sondern in deren Inneren.

Aus diesen Überlegungen ergeben sich daher die folgenden Sätze.

*Satz II.* Die Hüllkurve (Kardioide) ist mit der Menge der Schnittpunkte aller adjungierten Tangenten identisch. Die Schnittpunkte der adjungierten Sekanten erfüllen das ganze Innere der Hüllkurve.

*Satz III.* Für alle Paare von irgendzwei verschiedenen Kreisen, deren Mittelpunkte auf dem Kreis  $K$  liegen und die durch den festen Punkt  $S' \in K$  gehen, ist die Menge der  $X$ -Punkte bezüglich ihres anderen Schnittpunktes ein- und dieselbe.

8. Die folgende Skizze diene zur Veranschaulichung des betrachteten Sachverhaltes.



Figur 4

P. H. MÜLLER, Dresden

## Aufgaben

**Aufgabe 419.** In der Ebene seien  $n$  Punkte gegeben, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen<sup>1)</sup>. Man zeige, dass diese Punkte mindestens  $n - 2$  verschiedene Winkel bestimmen und dass genau  $n - 2$  verschiedene Winkel nur dann bestimmt werden, wenn die Punkte ein reguläres  $n$ -Eck bilden. P. ERDÖS

<sup>1)</sup> Diese Voraussetzung fehlte in der ursprünglichen Aufgabenstellung.

*Lösung des Aufgabenstellers:*  $x_1, x_2, \dots, x_k$  seien die in positivem Sinn durchlaufenen Eckpunkte des kleinsten konvexen Polygons, das die  $n$  Punkte enthält. Mit  $y_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 2$ ) bezeichnen wir die von  $x_1, x_2$  verschiedenen Punkte in der Reihenfolge, wie sie von einem sich um  $x_1$  in positivem Sinn drehenden Strahl überstrichen werden. Nach Voraussetzung liegen nie zwei  $y_i$  auf demselben Strahl. Offenbar ist  $y_{n-2} = x_k$ . Setzen wir

$$\sphericalangle(x_2, x_1, y_1) = \alpha_1, \quad \sphericalangle(y_1, x_1, y_2) = \alpha_2, \dots, \quad \sphericalangle(y_{n-3}, x_1, x_k) = \alpha_{n-2},$$

so sind die  $n - 2$  Winkel

$$\beta_1 = \alpha_1, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \quad \beta_{n-2} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-2}$$

alle verschieden und der erste Teil der Behauptung ist bewiesen.

Wir setzen nun voraus, dass nur diese  $n - 2$  Winkel auftreten und zeigen, dass dann die  $n$  Punkte ein reguläres  $n$ -Eck bilden. Zunächst folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-2} = \alpha.$$

Wäre nämlich  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{i-1}$  und  $\alpha_i \neq \alpha_1$ , so wäre der Winkel

$$\sphericalangle(y_1, x_1, y_i) = \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_i$$

unter den  $n - 2$  Winkeln  $\beta_i$  nicht enthalten. Also ist jetzt  $\beta_i = i \alpha$ . Natürlich gilt dieselbe Überlegung auch, wenn man statt  $x_1$  die Ecke  $x_i$  als Ausgangsecke wählt. Folglich ist

$$\sphericalangle(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = (n - 2) \alpha \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, k.$$

Alle Winkel der konvexen Hülle sind gleich. Dass auch die Seiten gleich sind, folgt daraus, dass die Dreiecke  $x_{i-1} x_i x_{i+1}$  gleichschenkelig sind. Es ist nämlich

$$\sphericalangle(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}) = \sphericalangle(x_i, x_{i+1}, x_{i-1}) = \alpha.$$

Aus  $\sphericalangle(x_i, x_{i-1}, x_{i+1}) > \alpha$  würde nämlich folgen, dass ein Punkt  $y$  im Innern des Dreiecks  $x_{i-1} x_i x_{i+1}$  liegt. Dann wäre aber  $\sphericalangle(x_{i-1}, y, x_{i+1}) > (n - 2) \alpha$ , was unmöglich ist, da  $(n - 2) \alpha$  der grösste vorkommende Winkel ist. Somit ist die konvexe Hülle ein reguläres  $k$ -Eck. Aus  $\sphericalangle(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = (k - 2) \alpha$  folgt schliesslich  $k = n$ .

CORRÁDI und HAJNAL vermuten, dass der Satz richtig bleibt, wenn man nur voraussetzt, dass nicht *alle* Punkte auf einer Geraden liegen.

Eine weitere Lösung sandte W. JÄNICHEN (Berlin).

**Aufgabe 420.** Es sei  $n_1, n_2, \dots$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $n_k^{1/2^k} \rightarrow \infty$ . Dann gilt:  
 $\sum_{k=1}^{\infty} 1/n_k$  ist irrational. PAUL ERDÖS

*Lösung des Aufgabenstellers:* Wir setzen  $2^k = e(k)$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  gilt. Wäre nämlich die Folge  $n_1, n_2, \dots$  nicht monoton und  $m_1 \leq m_2 \leq \dots$  eine monotone Umordnung unserer Folge, so folgt offenbar aus  $n_k^{1/e(k)} \rightarrow \infty$  auch  $m_k^{1/e(k)} \rightarrow \infty$ . Als leichte Verallgemeinerung des Satzes in der Aufgabe beweisen wir jetzt, dass aus

$$\left( \prod_{i=1}^k n_i \right)^{1/e(k)} \rightarrow \infty \tag{1}$$

die Irrationalität von  $\sum 1/n_k$  folgt. (Es ist leicht zu sehen, dass (1) nur für monotone Folgen die Irrationalität der Summe bedingt.)

Wir setzen

$$N_k = \prod_{i=1}^k n_i, \quad c_k = N_k^{1/e(k)}.$$

Aus (1) folgt die Existenz unendlich vieler  $k$ , für die die Ungleichungen

$$c_{k+i} > c_k \prod_s (1 + s^{-2}), \quad k + 1 \leq s \leq k + i, \quad i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

gelten. Gäbe es nämlich nur endlich viele solche  $k$ , so würde ein  $k_0$  existieren, so dass zu jedem  $k \geq k_0$  ein  $i = i(k)$  gehört, für das

$$c_{k+i} \leq c_k \prod_s (1 + s^{-2}). \tag{3}$$

Setzt man in (3) für  $k$  der Reihe nach die Werte  $k_0, k_1 = k_0 + i(k_0), k_2 = k_1 + i(k_1), \dots$  und multipliziert die so entstehenden Ungleichungen, so ergibt sich

$$\liminf c_k \leq c_{k_0} \prod_{s=1}^{\infty} (1 + s^{-2}) < \infty$$

im Widerspruch zu (1). Nehmen wir jetzt an, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k} = \frac{a}{b}, \tag{4}$$

wo  $a$  und  $b$  natürliche Zahlen sind, und es sei  $K$  ein genügend grosses  $k$  mit der Eigenschaft (2). Multiplizieren wir beide Seiten von (4) mit  $b N_K$ , so ergibt sich

$$b N_K \{n_{K+1}^{-1} + n_{K+2}^{-1} + \dots\} = \text{ganze Zahl.} \tag{5}$$

Wegen  $n_i \leq n_{i+1}$  ist

$$n_{K+1}^{-1} + n_{K+2}^{-1} + \dots \leq n_{K+1}^{-1} + (n_{K+1} n_{K+2})^{-1/2} + (n_{K+1} n_{K+2} n_{K+3})^{-1/3} + \dots \tag{6}$$

Ferner folgt aus (2) für  $i = 1, 2, \dots$

$$\left. \begin{aligned} n_{K+1} n_{K+2} \dots n_{K+i} &= N_{K+i} N_K^{-1} = c_{K+i}^{e(K+i)} c_K^{-e(K)} \\ &> (1 + (K+1)^{-2})^{e(K+i)} c_K^{e(K+i) - e(K)} > \{c_K [1 + (K+1)^{-2}]\}^{e(K)\{e(i)-1\}}. \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Mit der Abschätzung  $e(i) \geq 1 + 0,5 i + 0,5 i^2$  erhält man für  $x > 2$

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^{-(e(i)-1)/i} < \sum_{i=1}^{\infty} x^{-(i+1)/2} = x^{-1} (1 - x^{-1/2})^{-1} < 4 x^{-1}. \tag{8}$$

Da  $c_K > 2$  für genügend grosses  $K$  gilt, ergibt sich nun aus (6), (7) und (8)

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_{K+i}^{-1} < 4 \{c_K [1 + (K+1)^{-2}]\}^{-e(K)}.$$

Somit ist

$$b N_K \sum_{i=1}^{\infty} n_{K+i}^{-1} < 4 b [1 + (K+1)^{-2}]^{-e(K)}.$$

Für genügend grosses  $K$  wird die rechte Seite dieser Ungleichung  $< 1$  und wir erhalten einen Widerspruch zu (5).

*Bemerkung:* Die Aufgabe wurde auch in Ungarn im mathematischen Wettbewerb des Jahres 1960 zu Ehren von MIKLOS SCHWEITZER gestellt.

**Aufgabe 421.** Gegeben ist ein Kegelschnitt  $K$  und auf ihm die Punkte  $P_1, P_2, P_3$ . Man konstruiere drei sich gegenseitig berührende Kegelschnitte  $K_1, K_2, K_3$ , welche  $K$  respektive in  $P_1, P_2, P_3$  vierpunktig berühren. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

*Lösung des Aufgabenstellers:* Die Gleichung von  $K$ , auf das Koordinatendreieck  $P_1 P_2 P_3$  und einen passenden Einheitspunkt bezogen, ist  $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = 0$ , diejenige der Tangente in  $P_1$   $x_2 + x_3 = 0$ , und damit die Gleichung von  $K_1$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 + \lambda_1 (x_2 + x_3)^2 = 0.$$

Zyklische Vertauschung der Indices gibt die Gleichungen von  $K_2$  und  $K_3$ . Denkt man sich durch eine projektive Transformation  $P_1 P_2$  zur Achse des gegebenen Kegelschnittes gemacht, so erkennt man, dass der Berührungspunkt  $Q_3$  von  $K_1$  und  $K_2$  auf  $P_1 P_2$  liegen muss, und dass die gemeinsame Tangente in  $Q_3$  durch den Pol  $S_3$  von  $P_1 P_2$  bezüglich  $K$  gehen muss. Soll der Punkt  $Q_3 (-\lambda_1 | 1 | 0)$  von  $K_1$  identisch sein mit dem Punkt  $(1 | -\lambda_2 | 0)$  von  $K_2$ , so muss  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$  sein. Entsprechend  $\lambda_3 = 1/\lambda_2 = \lambda_1$  und  $\lambda_1 = 1/\lambda_3 = 1/\lambda_1$ , also  $\lambda_1 = \pm 1$ . Wählt man  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = +1$ , so wird  $Q_3 (-1 | 1 | 0)$  Schnittpunkt von  $P_1 P_2$  ( $x_3 = 0$ ) mit der Tangente in  $P_3$  ( $x_1 + x_2 = 0$ ) und analog erhält man  $Q_1$  und  $Q_2$ . Nimmt man  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$ , so wird  $Q'_3 (1 | 1 | 0)$  Schnittpunkt von  $P_1 P_2$  und der Geraden  $x_1 - x_2 = 0$ , welche  $P_3$  mit  $S_3 (1 | 1 | -1)$  verbindet, und analog ergeben sich  $Q'_1$  und  $Q'_2$ . Die Geraden  $Q_i S_i$  bzw.  $Q'_i S_i$  sind die Tangenten in  $Q_i$  bzw.  $Q'_i$ . Im zweiten Fall fallen sie zusammen mit den Geraden  $P_i S_i$ .

2. Lösung: Zunächst nehmen wir an, dass  $K$  ein Kreis ist. Die Ebene von  $K$  heisse  $\pi$ .  $K$  werde als Grosskreis einer Kugel  $\kappa$  aufgefasst. Es ist bekannt, dass jede Ebene, deren Schnittgerade mit  $\pi$  Tangente an  $K$  ist,  $\kappa$  in einem Kreis schneidet, dessen Normalprojektion auf  $\pi$  eine den Kreis  $K$  vierpunktig berührende Ellipse liefert (und zwar ist  $K$  Krümmungskreis in einem Nebenseitel dieser Ellipse). Es ist daher – wenn möglich – durch die Tangente  $t_j$  in  $P_j$  an  $K$  eine Ebene  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) so zu legen, dass die Schnittgeraden  $\varepsilon_j \varepsilon_k = g_{jk}$  Tangenten an die Kugel  $\kappa$  sind: Die Normalprojektionen auf  $\pi$  der auf diese Weise erhaltenen Kreise  $\kappa_j$  von  $\kappa$  sind die gesuchten Kegelschnitte  $K_j$ .

Der Spurpunkt von  $g_{jk}$  in  $\pi$  ist der Schnittpunkt  $T_{jk}$  der Geraden  $t_j$  und  $t_k$ .  $g_{jk}$  ist eine Erzeugende jenes Kreiskegels  $\varphi_{jk}$ , der von  $T_{jk}$  aus an  $\kappa$  gelegt werden kann, und berührt  $\kappa$  in einem Punkt, der auf dem Berührkreis von  $\varphi_{jk}$  mit  $\kappa$  liegt. Die Normalprojektion dieses Berührkreises auf  $\pi$  fällt in die Verbindungsgerade  $P_j P_k$ , auf der also der Berührungspunkt der Kegelschnitte  $K_j$  und  $K_k$  zu suchen ist.

Die Schnittfigur zweier Kreiskegel  $\varphi_{jl}, \varphi_{lk}$  ( $j l k = 123, 231, 312$ ) besteht aus der doppelt zu zählenden gemeinsamen Erzeugenden  $t_l$  und einem Kegelschnitt, von dessen Normalprojektion auf  $\pi$  man sich leicht überlegt, dass sie in die Verbindungsgerade  $T_{jk} P_l$  fällt. Diese Gerade stellt sich als der Normalriss der gesuchten Geraden heraus, der auf der Geraden  $P_j P_k$  den Berührungspunkt  $Q_{jk}$  von  $K_j$  und  $K_k$  ausschneidet (wir nehmen an, dass der Schnittpunkt der drei Ebenen  $\varepsilon_j$  etwa oberhalb  $\pi$  liegt, wodurch die Lage der Geraden  $g_{jk}$  fixiert ist).

Durch einen der Punkte  $Q_{jk}$  ( $j k = 12, 13; 23, 21; 31, 32$ ) und die Angabe, dass  $K_j$  den Kegelschnitt  $K$  in  $P_j$  vierpunktig berühren soll, ist  $K_j$  eindeutig festgelegt (er ist «überbestimmt», da in den Punkten  $Q_{jk}$  ja auch noch die Tangenten bekannt sind). Die projektive Invarianz der angegebenen, ganz in  $\pi$  ausgeführten Konstruktion der Punkte  $Q_{jk}$  liegt auf der Hand, so dass die Aufgabe für den Fall, dass  $K$  kein Kreis ist, keiner besonderen Behandlung mehr bedarf.

G. GEISE, Dresden

Eine weitere Lösung sandte J. BASILE (Brüssel).

**Aufgabe 422.** Sind  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n \geq 2$ ) voneinander verschiedene nicht-negative ganze Zahlen, dann ist

$$\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(v+a_1)(v+a_2)\dots(v+a_n)} = - \sum_{i=1}^n D_i \sum_{v=1}^{a_i} \frac{1}{v}$$

mit  $D_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (a_k - a_i)^{-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

O. REUTTER (Ochsenhausen/Deutschland)

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei  $A = \text{Max}(a_1, \dots, a_n)$ . Wir betrachten nun die  $n$  Potenzreihen

$$f_i(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D_i}{v+a_i} x^{v+A} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Diese sind im offenen Intervall  $|x| < 1$  absolut konvergent, da  $|D_i/(v + a_i)| \leq D_i$  ist. Daher ist auch die Potenzreihe

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n f_i(x) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D_i}{v + a_i} x^{v+A} \right) \\ &= \sum_{v=1}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^n \frac{D_i}{v + a_i} \right) x^{v+A} = \sum_{v=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (v + a_i)^{-1} x^{v+A} \end{aligned}$$

in  $|x| < 1$  absolut konvergent.  $f(x)$  ist sogar im abgeschlossenen Intervall  $|x| \leq 1$  gleichmässig konvergent, denn für  $|x| \leq 1$  gilt

$$\left| \prod_{i=1}^n (v + a_i)^{-1} x^{v+A} \right| \leq \prod_{i=1}^n (v + a_i)^{-1} \leq v^{-n},$$

und  $\sum_{v=1}^{\infty} v^{-n}$  ist für  $n \geq 2$  eine konvergente Majorante. Aus der gleichen Konvergenz von  $f(x)$  in  $|x| \leq 1$  folgt die Existenz des Grenzwertes

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \prod_{i=1}^n (v + a_i)^{-1} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(v + a_1) \dots (v + a_n)}, \quad (1)$$

Nun lässt sich  $f(x)$  in  $|x| < 1$  auch in anderer Form darstellen: Für  $|x| < 1$  ist nämlich zunächst

$$f_i(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{D_i}{v + a_i} x^{v+A} = D_i x^{A-a_i} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^{v+a_i}}{v + a_i} = -D_i x^{A-a_i} \left\{ \ln(1-x) + \sum_{v=1}^{a_i} \frac{x^v}{v} \right\}$$

(letztere Summe ist als leer anzusehen, falls  $a_i = 0$  ist), also

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) = -\ln(1-x) \sum_{i=1}^n D_i x^{A-a_i} - \sum_{i=1}^n D_i x^{A-a_i} \sum_{v=1}^{a_i} \frac{x^v}{v}.$$

Weiterhin ist wegen  $\sum_{i=1}^n D_i = 0$  auch  $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{i=1}^n D_i x^{A-a_i} = 0$ , so dass es ein Polynom  $p(x)$  derart gibt, dass  $\sum_{i=1}^n D_i x^{A-a_i} = (1-x)p(x)$  ist. Somit haben wir für  $f(x)$  in  $|x| < 1$  die Darstellung

$$f(x) = -p(x)(1-x)\ln(1-x) - \sum_{i=1}^n D_i x^{A-a_i} \sum_{v=1}^{a_i} \frac{x^v}{v}.$$

Wegen  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\ln(1-x) = 0$  folgt aus obiger Gleichung

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = - \sum_{i=1}^n D_i \sum_{v=1}^{a_i} v^{-1}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich sofort die behauptete Gleichung.

G. GEISE (Dresden) weist darauf hin, dass die Aufgabe ein Sonderfall der Aufgabe 106 auf S. 277 von K. KNOPP, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Berlin und Heidelberg 1947, ist. Er löst diese Aufgabe mit Satz 134 des genannten Werkes. Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin) und H. MEILI (Winterthur).

**Ergänzung** zur Lösung der Aufgabe 401 (El. Math. 17, 87–88 (1962)):

Die im Lösungstext angeführten zwei reellen Lösungen beziehen sich bloss auf eine spezielle Figur. Die Schnittpunkte der Geraden  $s$  mit den Verbindungsstrecken  $P_1 P'_1$ ,  $P_2 P'_2$ ,  $P_3 P'_3$  liegen entweder alle ausserhalb, alle innerhalb oder alle in einem Endpunkt dieser Strecken. Diese drei Fälle führen dann entweder zu zwei reellen, zwei konjugiert komplexen oder zwei zusammenfallenden Lösungen. Da das gleiche auch für die Geraden  $s_1$ ,  $s_2$  und  $s_3$  gilt, sind insgesamt 0 bis 8 reelle Lösungen möglich. K. GRÜN (Linz)

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 444.** Als «unterer Höhenabschnitt» im Dreieck sei der Abstand des Höhen schnittpunktes von der Dreiecksseite bezeichnet. Man zeige: Die Summe der unteren Höhenabschnitte ist höchstens so gross wie die Summe der Abstände des Umkreis zentrums von den Dreiecksseiten. Gleichheit tritt nur im gleichseitigen Dreieck auf.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

**Aufgabe 445.** Es sei  $p$  eine Primzahl der Form  $8m + 3$  oder  $8m + 5$  und  $k$  eine natürliche Zahl. Man beweise die Kongruenz

$$2^{p^k (p-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}.$$

L. BERNSTEIN, Tel-Aviv

**Aufgabe 446.** Existe-t-il un nombre entier  $n > 1$  qui divise le nombre  $2^{n-1} + 1$ ?

A. ROTKIEWICZ, Varsovie

**Aufgabe 447.** Ein Torus (Meridiankreisradius =  $r$ , Kehlkreisradius =  $R$ ) hängt so an einem geraden horizontalen Kreiszyylinder (Zylinderradius =  $\rho$ ,  $\rho \leq R$ ), dass die Zylinderachse senkrecht zur Kehlkreisebene steht. Um welchen Winkel kann der Torus, ohne sich abzuheben, um die gemeinsame Normale im Berührungspunkt gedreht werden? Wie lässt sich das Resultat für allgemeinere Ringe (Rohrflächen mit einer gegebenen Eilinie als Mittelpunktskurve aussprechen)? E. TROST

## Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll,  $x$ -Achse nach rechts,  $y$ -Achse nach vorn,  $z$ -Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. In der *Arithmetica integra* (1544) von MICHAEL STIFEL (1487(?)–1567) findet sich ein Satz, der sich in unserer Schreibweise so ausdrücken lässt:

$$\text{Für } x = 2^n \text{ gilt } 1 + 2^x + 4^x \equiv 0 \pmod{7}.$$

► Betrachte die Reste der aufeinanderfolgenden Potenzen von 2 und von 4 bei Division durch 7. Es genügt übrigens,  $x \equiv \pm 1 \pmod{3}$  vorauszusetzen.

2. Es war schon TSCHIRNHAUSEN (1651–1708) bekannt, dass die sichelförmige Figur (Lunula), die von einem Halbkreis und dem Viertelskreis über dessen Durchmesser  $AB$  begrenzt wird, durch Strahlen aus dem Zentrum  $Z$  des Viertelskreises exakt in  $n$  gleiche Teile geteilt werden kann.

► Teile  $AB$  in  $n$  gleiche Teile, ziehe durch die Teilpunkte die Lote zu  $AB$ , ihre Schnittpunkte mit dem Halbkreis bestimmen die teilenden Strahlen.

3. «Aus der Spitze  $C$  eines Dreiecks  $ABC$  nach irgend einem Punkte  $D$  der Grundlinie  $AB$  eine solche Gerade  $CD$  zu ziehen, deren Quadrat zu dem Rechteck unter den Abschnitten der Grundlinie,  $AD$  und  $BD$ , ein gegebenes Verhältniss hat, wie  $m : n$ .»

JAKOB STEINER (1796–1863), Werke II, S. 391.

► Das heisst, es soll  $CD^2 : AD \cdot BD = m : n$  sein.

Verlängere  $CD$  bis zum Schnitt mit dem Umkreis des Dreiecks und wende den Sehnen-satz an.

4. «Wenn in einer Ebene drei beliebige Kreise einander in einem Punkte schneiden, so soll man durch denselben eine Gerade so ziehen, dass, wenn  $A, B, C$  ihre übrigen Durchschnitte mit den Kreisen sind, die Abschnitte  $AB, BC$  der Geraden ein gegebenes Verhältniss zu einander haben.»

STEINER, Werke I, S. 127.

5.  $U$  und  $V$  sind die Endpunkte konjugierter Durchmesser einer Ellipse. Die Brennpunkte von  $U$  bilden den Winkel  $\varphi$ , diejenigen von  $V$  den Winkel  $\psi$ . Es gilt

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{c^2}{b^2}.$$

STEINER, Werke II, S. 396.

► Stehen keine Hilfssätze zur Verfügung, so kann man vielleicht so vorgehen: Aus dem Dreieck  $F_1 U F_2$  findet man  $\cos \varphi$ , und hieraus

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{c^2 y^2}{b^4}, \quad \text{usw.}$$

## Rapport sur l'Assemblée générale annuelle de la VSM-SSPM

Baden, 29 septembre 1962

Réunie à Baden pour son assemblée d'automne, notre société a tenu à 14 h 15 une séance commune avec la société des professeurs d'histoire, illustrant ainsi de façon visible la complémentarité des disciplines.

Nous entendîmes le professeur J. E. HOFMANN d'Ichenhausen (Bavière) nous parler du sujet suivant: «Mathematik und Naturwissenschaft im Rahmen der allgemeinen Geistesgeschichte der neueren Zeit (Möglichkeiten der Darstellung im Mathematik- und Geschichtsunterricht)». Avec une grande érudition il sut mettre en lumière quelques moments importants de l'histoire des sciences.

Ensuite, à 15 h 45, séparés de nos collègues historiens, nous nous retrouvions mathématiciens et physiciens pour écouter le dévoué caissier de notre société, le P. S. Horz, nous entretenir de ses travaux sur les fondements de l'électrodynamique. Par son exposé «Zur Grundlage der Elektrodynamik», le P. Horz captiva son auditoire en dérivant les équations de l'électrodynamique de façon originale à partir de la notion de charge et de champ coulombien au moyen des transformations de Lorentz. Il eut l'amabilité de répondre aux questions qui lui furent posées le soir après la séance administrative.

Un excellent dîner en commun fut servi à l'hôtel Ochsen-Verenahof, dîner qui fut suivi d'une brève séance administrative. Après la lecture des rapports habituels, la discussion tourna autour de la réforme de l'enseignement des mathématiques. Plusieurs membres estimant qu'une discussion générale sur ce sujet serait fort intéressante, il fut décidé que notre société consacrerait une séance extraordinaire à l'étude des projets de réforme. La date du 1er décembre a été retenue pour cette assemblée.

Le secrétaire de la SSPM  
E. VAUCHER