Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 1

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Corollary 1 ([2, (1.3)]). *If k is a prime* $\neq 2$, *then*

$$V_k(x) = \left(1 - \frac{\zeta(k)}{\zeta(k-1)}\right) x + O\left(x^{\frac{1}{k-1}}\right). \tag{3.5}$$

ECKFORD COHEN, University of Tennessee, Knoxville USA

BIBLIOGRAPHY

[1] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, II. *An estimate of* ERDÖS *and* SZEKERES, Scripta Mathematica, to appear.
[2] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, IV. *A set of integers related to the divisor function*, Journal of the Tennessee Academy of Science, vol. *37* (1962), 119–120.
[3] ECKFORD COHEN, *Arithmetical Notes*, V. *A divisibility property of the divisor function*, American Journal of Mathematics, vol. *83* (1961), 693–697.

Kleine Mitteilungen

Adjungierte Sekanten und Tangenten zweier Kreise

Man betrachte irgendzwei in einer Ebene liegende und sich im Punkte S schneidende Kreise K_1 und K_2; der Schnittwinkel sei α. Durch S lege man zwei beliebige Geraden p und q, die mit K_1 bzw. K_2 ausser S im allgemeinen je einen Schnittpunkt P_1, Q_1 bzw. P_2, Q_2 ergeben. Die durch P_1, Q_1 bzw. P_2, Q_2 verlaufenden Geraden g_1 bzw. g_2 wollen wir ein Paar «adjungierte Sekanten» nennen. Im Fall $p = q$ betrachten wir die durch $P_1 = Q_1$ bzw. $P_2 = Q_2$ verlaufenden «adjungierten Tangenten».

Untersucht man nun die Menge der Schnittpunkte je zweier zueinander adjungierter Sekanten und Tangenten bei willkürlicher Variation von p und q, so ergeben sich einige interessante Eigenschaften.

Man kann zu dieser Fragestellung ausgehend von verschiedenen geometrischen Aspekten mit den entsprechenden Vorkenntnissen Zugang finden. Bemerkenswert ist aber auch die Möglichkeit einer elementaren Betrachtungsweise, die im folgenden dargelegt werden soll.

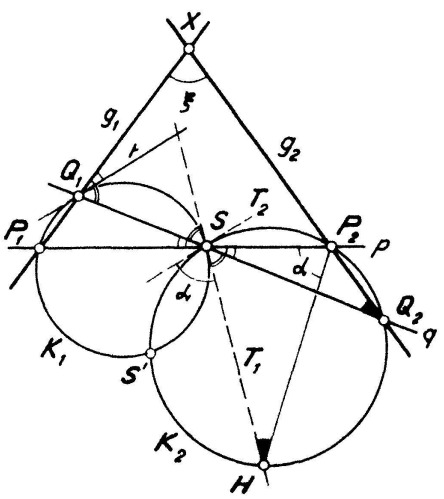
Wir vereinbaren vorerst die Bezeichnungen: S, S' Schnittpunkt der Kreise K_1, K_2 mit S als Sekantenzentrum. Die interessierenden Schnittpunkte adjungierter Sekanten (bzw. Tangenten) g_1, g_2 nennen wir «X-Punkte».

1. *Satz I.* Adjungierte Sekanten (und Tangenten) schneiden sich stets unter demselben Winkel, und zwar unter dem Schnittwinkel α der Kreise.

Den Beweis hierfür entnehme man in einfacher Weise aus der folgenden Skizze bei Beachtung elementargeometrischer Tatsachen.

Dabei bedeuten:

t die Tangente an K_1 in Q_1
T_1 die Tangente an K_1 in S
T_2 die Tangente an K_2 in S

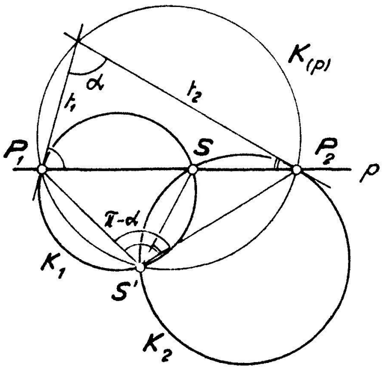


Figur 1

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke SHP_2 und $Q_1 Q_2 X$ folgt $\alpha = \xi$.

2. Aus dem vorangehenden Satz folgt: wird p festgehalten und lässt man q beliebig variieren, dann liegen die zugehörigen X-Punkte auf einem Kreis, den wir $K(p)$ nennen wollen. Wie man sich zunächst leicht überlegt, verläuft dieser durch die Punkte P_1, P_2. Die nächste Skizze zeigt, dass auch stets der Punkt S' zu $K(p)$ gehört.

Dabei bedeuten: t_1 die Tangente an K_1 in P_1
t_2 die Tangente an K_2 in P_2



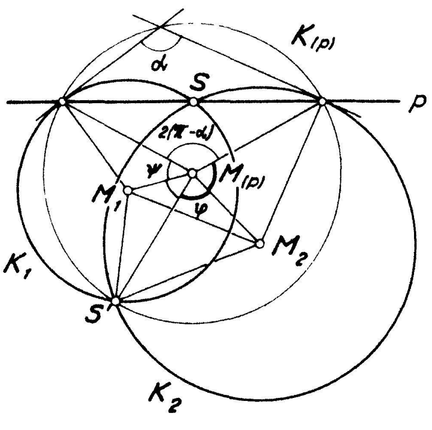
Figur 2

3. Man überlegt sich unschwer, dass auch jeder Punkt von $K(p)$ als X-Punkt für eine geeignete Sekante q zu dem vorliegenden p in Frage kommt.

4. M_1 bzw. M_2 seien die Mittelpunkte der gegebenen Kreise K_1 bzw. K_2.

Behauptung: Die Mittelpunkte $M(p)$ der Kreise $K(p)$ liegen ebenfalls auf einem Kreis K; dieser verläuft durch die Punkte S', M_1, M_2.

Dass die Mittelpunkte $M(p)$ auf einem durch M_1 und M_2 verlaufenden Kreise liegen, ersieht man wiederum durch eine Winkelbetrachtung nach folgender Skizze:



Figur 3

$$\varphi + \psi = \frac{1}{2}\,[2\pi - 2(\pi - \alpha)] = \alpha = \text{const.}$$

Die Zugehörigkeit von S' zu K schliesst man zum Beispiel mittels einer Folge von Sekanten p, die man gegen die durch S, S' verlaufende Gerade streben lässt.

5. Variiert man nun die im Vorangehenden betrachtete Sekante p, so erkennt man, dass umgekehrt auch jeder Punkt von K das Zentrum $M(p)$ eines Kreises der Schar $K(p)$ ist. Einer stetigen Drehung von p entspricht nämlich eine stetige Veränderung von $M(p)$ auf K.

6. Die Gesamtheit aller X-Punkte liegt offenbar im Innern der zur Kreisschar $K(p)$ gehörenden Hüllkurve. Beachten wir, dass die Kreise der Schar $K(p)$ nach 4. und 5. dadurch charakterisiert sind, dass ihre Mittelpunkte auf K liegen und alle Kreise den Punkt $S' \in K$ gemeinsam haben, so ergibt sich daraus bekanntermassen als Hüllkurve die Kardioide. Zur genauen Angabe ihrer Gleichung sei ein einfacher Beweis hierfür durchgeführt. Wir wählen das Zentrum von K als Ursprung eines kartesischen Koordi-

natensystems. Der Radius von K sei a; die Koordinaten von S' seien $(a, 0)$. Für einen Kreis der Schar $K(p)$ mit den Mittelpunktskoordinaten (ξ, η) gilt dann

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (a - \xi)^2 + \eta^2. \qquad 13$$

Mit $\xi = a \cos \varphi$, $\eta = a \sin \varphi$ ergibt sich daraus die Gleichung der Kurvenschar

$$F\,(x, y, \varphi) = x^2 + y^2 - a^2 - 2\,a\,[(x - a) \cos \varphi + y \sin \varphi] = 0\,.$$

Zusammen mit der weiteren Bedingung für die Hüllkurve

$$F_\varphi = 2\,a\,[(x - a) \sin \varphi - y \cos \varphi] = 0$$

folgt durch einfache Elimination von φ die gesuchte Gleichung:

$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 = 4\,a^2\,((x - a)^2 + y^2).$$

Dies ist aber bekanntlich die Gleichung der Kardioide mit der Spitze in $S' = (a, 0)$.

7. Allgemein ist jeder Punkt einer Hüllkurve Berührpunkt mit einer Kurve der Schar, hier also einem Kreise $K(p)$. Also ist nach 3. jeder Punkt der Kardioide ein X-Punkt.

Man kann sich leicht überlegen, dass jeder Punkt P innerhalb der Hüllkurve – der also nicht auf der Kardioide selbst liegt – auf genau zwei verschiedenen Kreisen $K(p)$ liegt, nach 3. jedenfalls ein X-Punkt ist. Um dies zu sehen, errichte man auf der Verbindungsstrecke $\overline{PS'}$ die Mittelsenkrechte. Deren zwei Schnittpunkte mit K liefern nach 5. die Mittelpunkte $M(p)$ für die in Frage kommenden Kreise $K(p)$.

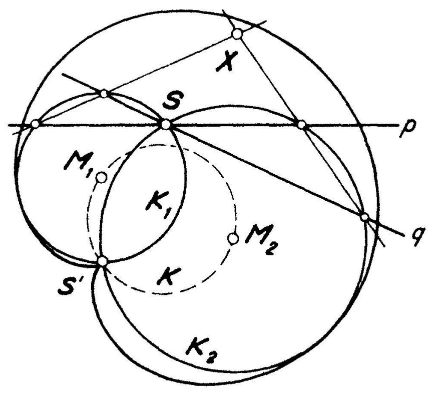
Andererseits ist der Schnittpunkt zweier adjungierter Sekanten, die keine adjungierten Tangenten sind, der Schnittpunkt zweier verschiedener Kreise der Schar, liegt daher nicht auf der Hüllkurve, sondern in derem Inneren.

Aus diesen Überlegungen ergeben sich daher die folgenden Sätze.

Satz II. Die Hüllkurve (Kardioide) ist mit der Menge der Schnittpunkte aller adjungierten Tangenten identisch. Die Schnittpunkte der adjungierten Sekanten erfüllen das ganze Innere der Hüllkurve.

Satz III. Für alle Paare von irgendzwei verschiedenen Kreisen, deren Mittelpunkte auf dem Kreis K liegen und die durch den festen Punkt $S' \in K$ gehen, ist die Menge der X-Punkte bezüglich ihres anderen Schnittpunktes ein- und dieselbe.

8. Die folgende Skizze diene zur Veranschaulichung des betrachteten Sachverhaltes.



Figur 4

P. H. Müller, Dresden

Aufgaben

Aufgabe 419. In der Ebene seien n Punkte gegeben, von denen nicht drei auf einer Geraden liegen[1]). Man zeige, dass diese Punkte mindestens $n - 2$ verschiedene Winkel bestimmen und dass genau $n - 2$ verschiedene Winkel nur dann bestimmt werden, wenn die Punkte ein reguläres n-Eck bilden. P. Erdös

[1]) Diese Voraussetzung fehlte in der ursprünglichen Aufgabenstellung.