

Über die Verallgemeinerung eines Satzes von Sierpiski

Autor(en): **Härtter, E.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **16 (1961)**

Heft 6

PDF erstellt am: **18.04.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-21294>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Es ist deshalb sachgemäss, wenn im mathematischen Unterricht im richtigen Zeitpunkt auch diese Dinge ihrer grundsätzlichen Natur nach zur Behandlung kommen, an Stelle von veraltetem Stoff, der bloss infolge des bekannten Trägheitsprinzips noch immer mitgeschleppt wird. Im richtigen Zeitpunkt: das heisst nicht zu früh. Verfrüht gegebene Kost kann sich nämlich wie Gift mit unheilbaren Folgen auswirken.

Die historische Entwicklung gibt auch die Hinweise, was in dieser Richtung den 17jährigen zu zeigen ist, nämlich *Boolesche Verbände* und ihre wichtigsten Modelle in der Mengenlehre, in der elementaren Zahlentheorie und in der formalen Logik.

Die Vermittlung einer Einsicht in das technische Funktionieren eines gegebenen Formalismus lässt dann erst recht aufleuchten, was es bedeutet, dass ein solcher eben niemals eine *Intuition* haben kann. Bildlich, aber gewiss allgemein verständlich ausgedrückt: Ein fest gegebener Formalismus spielt sich im Finstern unter der Erdoberfläche ab, während das – formal nicht von vornherein festgelegte – inhaltliche Denken den offenen Himmel über sich hat und damit stets bereit ist, sich neu befruchten zu lassen.

Der folgende Abschnitt bringt einige Bemerkungen zu den aufgeworfenen Fragen.

L. LOCHER-ERNST

Über die Verallgemeinerung eines Satzes von SIERPIŃSKI

1. Bei der Untersuchung der Primzahlen entstand die Frage, ob es zahlentheoretische Funktionen $F(n)$ gibt, für die die Folge der Funktionswerte $F(1), F(2), \dots$

(I) nur aus Primzahlen besteht, bzw.

(II) mit der Folge der Primzahlen $\mathfrak{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ ($p_n < p_{n+1}$) übereinstimmt.

W. H. MILLS [1]¹⁾ ist es zuerst gelungen, eine Funktion zu konstruieren, die die Eigenschaft (I) hat, indem er zeigte, dass es eine reelle Zahl A gibt mit $[A^{3^n}] \in \mathfrak{P}$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ ²⁾. L. KUIPERS [2], I. NIVEN [3] und A. R. ANSARI [4] verallgemeinerten dieses Beispiel, indem sie an Stelle des Exponenten 3 allgemeiner eine Zahl c betrachteten. Eine etwas anders gebaute Funktion mit der Eigenschaft (I) gab E. M. WRIGHT [5] durch den Nachweis der Existenz einer reellen Zahl α_0 derart, dass die durch die Rekursionsformel $\alpha_{n+1} = 2^{\alpha_n}$ bestimmten Zahlen $[2^{\alpha_0}], [2^{\alpha_1}], \dots$ sämtlich Primzahlen sind.

Eine Funktion $F(n)$, die der schärferen Forderung (II) genügt, konstruierte W. SIERPIŃSKI [6], indem er folgenden Satz bewies:

Satz 1: Es gibt eine reelle Zahl A , so dass gilt

$$p_n = [10^{2^n} A] - 10^{2^{n-1}} [10^{2^{n-1}} A]$$

für $n = 1, 2, \dots$. Dabei ist $A = \sum_{v=1}^{\infty} p_v 10^{-2^v}$.

2. Dieses Ergebnis lässt sich für die Darstellung einer beliebigen unendlichen Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) natürlicher Zahlen erweitern. Hierbei erhalten wir auch für den Spezialfall $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}$ eine Verallgemeinerung.

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 127.

²⁾ Das Symbol $[x]$ bedeutet die grösste ganze Zahl $\leq x$.

Sei $f(n)$ eine reellwertige positive zahlentheoretische Funktion, definiert für $n = 1, 2, \dots$, mit den Eigenschaften

(1) $f(n)/f(i)$ ist für alle natürlichen Zahlen n und alle $i \leq n$ eine ganze Zahl und

(2) $f(n) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} < 1$ für alle n .

Wir nennen dann $f(n)$ eine für die Folge $\mathfrak{A}$ *zulässige Funktion*. Zu jeder solchen Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ gibt es eine zulässige Funktion, denn man braucht nur zu setzen

$$f(n) = 10^{\sum_{\nu=1}^n (\lg a_{\nu} + 2)}.$$

(Hierbei bedeutet $\lg$ den Zehnerlogarithmus.) Eigenschaft (1) ist dann sofort klar; wegen

$$\begin{aligned} \frac{a_{\nu}}{f(\nu)} f(n) &\leq \frac{1}{10^{(\lg a_{n+1} + 2) + \dots + (\lg a_{\nu} + 2) + 1}} \\ &\leq \frac{1}{10^{(\nu-n)2-2+1}} \leq 10^{-1} \text{ für } \nu > n \end{aligned}$$

folgt

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{f(\nu)} f(n) \leq \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{10^{2(\nu-n)-1}} < 1.$$

Für jede für eine Folge $\mathfrak{A}$ zulässige Funktion folgt sofort, dass

(3) $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1}$ konvergent ist. Wir bezeichnen diese Summe mit A .

Beweis. Aus (2) folgt nämlich, dass $f(n)$ für $n \rightarrow \infty$ nicht beschränkt bleiben kann; weiter erhalten wir aus (2)

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} < \frac{1}{f(n)},$$

d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, so dass

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} < \varepsilon$$

wird, womit (3) bewiesen ist.

Als weitere Eigenschaften von $f(n)$ haben wir

(4) $f(n)$ ist monoton, also $f(n) \geq f(i)$ für $n \geq i$ (folgt sofort aus (1));

(5) mit $f(n)$ ist – wie man sich sofort überlegt – auch $c f(n)$ eine für eine Folge $\mathfrak{A}$ zulässige Funktion, wobei c eine positive Konstante ist, und

(6) wenn $f_1(n)$ und $f_2(n)$ für eine Folge $\mathfrak{A}$ zulässige Funktionen sind, dann hat auch das Produkt $f_1(n) f_2(n)$ diese Eigenschaft.

Beweis von (6): Die Gültigkeit der Bedingung (1) ist für $f_1(n) f_2(n)$ trivial. Bedingung (2) erhält man so: Nach (5) ist

$$f_1(n) f_2(n) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} (f_1(\nu) f_2(n))^{-1} < 1,$$

woraus man aber durch Verkleinerung der linken Seite erhält

$$f_1(n) f_2(n) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} (f_1(\nu) f_2(\nu))^{-1} < 1.$$

Bemerkung: Für die Funktion $f_2(n)$ ist Eigenschaft (2) nicht benutzt.

3. Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun die Verallgemeinerung von Satz 1 formulieren:

Satz 2: Zu jeder unendlichen Folge $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ($a_n \leq a_{n+1}$) natürlicher Zahlen gibt es eine reelle Zahl A , so dass gilt

$$a_n = [f(n) A] - \frac{f(n)}{f(n-1)} [f(n-1) A]$$

für $n = 1, 2, \dots$. Dabei ist $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1}$ und $f(n)$ bedeutet eine für $\mathfrak{A}$ zulässige Funktion.

Beweis: Wir haben

$$a_n = f(n) \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} (f(\nu))^{-1} - \frac{f(n)}{f(n-1)} \left(f(n-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} \right)$$

und, weil

$$f(n) \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} (f(\nu))^{-1} \quad \text{und} \quad f(n-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} (f(\nu))^{-1}$$

ganze Zahlen sind,

$$a_n = \left[f(n) \sum_{\nu=1}^n a_{\nu} (f(\nu))^{-1} + \varepsilon_1 \right] - \frac{f(n)}{f(n-1)} \left[f(n-1) \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} + \varepsilon_2 \right],$$

wobei ε_i beliebige reelle Zahlen mit $0 \leq \varepsilon_i < 1$ ($i = 1, 2$) sind. Weiterhin folgt wegen

$$(2) \text{ mit } \varepsilon_1 = f(n) \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} \text{ und } \varepsilon_2 = f(n-1) \sum_{\nu=n}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \left[f(n) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} \right] - \frac{f(n)}{f(n-1)} \left[f(n-1) \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} (f(\nu))^{-1} \right] \\ &= [f(n) A] - \frac{f(n)}{f(n-1)} [f(n-1) A]. \end{aligned}$$

4. TH. BANG [7] gibt ebenfalls eine Funktion an, die (II) erfüllt und sich von dem Beispiel SIERPIŃSKIS etwas unterscheidet. Hier lässt sich entsprechend eine Verallgemeinerung wie oben vornehmen, jedoch muss dann an die zulässige Funktion eine zusätzliche Forderung gestellt werden.

5. *Anwendungen.* Betrachten wir speziell die Folge der Primzahlen

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots.$$

Hierfür erfüllt jede Funktion $f(n) = a^{\alpha^n}$ ($a > 3$, ganz; $\alpha \geq 2$, ganz) die Eigenschaften (1) und (2).

Beweis: Eigenschaft (1) ist klar. Zum Beweis der Eigenschaft (2) beachten wir, dass gilt

$$(7) \quad p_n < a^{\alpha^n - 1} - 1,$$

wie sich leicht induktiv zeigen lässt: Für $n = 1$ erhalten wir $a - 1 > 2 = p_1$; sei nun (7) schon für alle $\nu \leq n$ nachgewiesen. Dann ist für $n \geq 1$ offenbar

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq p_1 p_2 \dots p_n + 1 < \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} a^{\alpha^\nu - 1} \right) (a^{\alpha^n - 1} - 1) + 1 = a^{\sum_{\nu=1}^{n-1} \alpha^\nu - 1} (a^{\alpha^n - 1} - 1) + 1 \\ &= a^{\frac{\alpha^n - 1}{\alpha} - 1} (a^{\alpha^n - 1} - 1) + 1 < a^{\alpha^n - 1 - 1} (a^{\alpha^n - 1} - 1) + 1 < a^{\alpha^n - 1} (a^{\alpha^n - 1} - 1) \leq \\ &\leq a^{\alpha^n} - a^{\alpha^n - 1} < a^{\alpha^n} - 1. \end{aligned}$$

Mit Ungleichung (7) folgt dann

$$\begin{aligned} p_\nu a^{-\alpha^\nu} &< (a^{\alpha^\nu - 1} - 1) a^{-\alpha^\nu} \leq a^{-\alpha^\nu - 1} - a^{-\alpha^\nu}, \\ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} p_\nu a^{-\alpha^\nu} &< \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (a^{-\alpha^\nu - 1} - a^{-\alpha^\nu}) = a^{-\alpha^n} \end{aligned}$$

und damit

$$a^{\alpha^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} p_\nu a^{-\alpha^\nu} < 1,$$

also (2).

Anwendung von Satz 2 ergibt nun

$$p_n = [a^{\alpha^n} A] - \frac{a^{\alpha^n}}{a^{\alpha^n - 1}} [a^{\alpha^n - 1} A], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

wobei $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} p_\nu a^{-\alpha^\nu}$ ist. Setzt man hierin speziell $a = 10$ und $\alpha = 2$, so erhält man Satz 1 von SIERPIŃSKI.

Auch die Folge der Fibonaccischen Zahlen $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) lässt sich auf diese Weise darstellen. Dazu benutzen wir folgenden

Hilfssatz: Für $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt

$$(8) \quad a_n < a^{\alpha^n - 1} - 1 \quad (a \geq 3, \text{ ganz}; a \geq 2, \text{ ganz}).$$

Den Beweis erbringen wir induktiv: Für $n = 1$ und 2 weist man sofort die Behauptung nach. Sei Ungleichung (8) schon für alle Indizes $\nu \leq n + 1$ bewiesen; dann ist

$$a_{n+2} < (a^{\alpha^n} - 1) + (a^{\alpha^{n+1}} - 1) < 2 a^{\alpha^n} - 2 < a a^{\alpha^n} - 2 = a^{\alpha^n + 1} - 2 \leq a^{\alpha^{n+1}} - 1.$$

Die Funktion $f(n) = a^{\alpha^n}$ ($a \geq 3$, ganz; $\alpha \geq 2$, ganz) erfüllt nun (1) und (2). Eigenschaft (1) ist wieder trivial; für Bedingung (2) folgt aus

$$a_\nu a^{-\alpha^\nu} < (a^{\alpha^\nu - 1} - 1) a^{-\alpha^\nu}$$

wie oben

$$a^{\alpha^n} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu a^{-\alpha^\nu} < 1.$$

Somit haben wir die Darstellung

$$a_n = [a^{\alpha^n} A] - \frac{a^{\alpha^n}}{a^{\alpha^n - 1}} [a^{\alpha^n - 1} A], \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

mit $A = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu a^{-\alpha^\nu}$.

E. HÄRTTER, Mainz

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. H. MILLS, *A prime-representing function*. Bull. Amer. math. Soc. 53, 604 (1947).
- [2] L. KUIPERS, *Prime-representing functions*. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 309–310 (1950); Indag. math., Amsterdam 12, 57–58 (1950).
- [3] I. NIVEN, *Functions which represent prime numbers*. Proc. Amer. math. Soc. 2, 753–755 (1951).
- [4] A. R. ANSARI, *On prime representing functions*. Ganita 2, 81–82 (1951).
- [5] E. M. WRIGHT, *A prime-representing function*. Amer. math. Monthly 58, 616–618 (1951).
- [6] W. SIERPIŃSKI, *Sur une formule donnant tous les nombres premiers*. Comptes Rendus 235, 1078–1079 (1952).
- [7] TH. BANG, *A function representing all prime numbers*. Norsk. Mat. Tidsskr. 34, 117–118 (1952).

Kleine Mitteilungen

Gegensätzliches Verhalten der arithmetischen und geometrischen Mittel

1. Vorbemerkungen

Das arithmetische Mittel A von n positiven Grössen ist nie kleiner als das geometrische Mittel G . Fast ebenso bekannt dürfte die Tatsache sein, dass aus $y_i, z_i > 0$ und der Gültigkeit von $A(y_i) \geq A(z_i)$ arithmetisch nicht etwa die Relation $G(y_i) \geq G(z_i)$ folgt. Die arithmetischen und geometrischen Mittel brauchen sich nicht gleichartig zu verhalten. Zahlenbeispiele für gegensätzliches Verhalten können leicht gefunden werden, doch mögen die folgenden *geometrischen* Beispiele aus der elementaren Dreiecksgeometrie vielleicht von Interesse sein. Bieten sie gar dem einen oder andern Kollegen Anregung zu kleinen Abweichungen vom üblichen Stoffprogramm an der Mittelschule, so erfüllt diese Note ihren Zweck völlig.

Im folgenden ist H das harmonische Mittel, $\sum_1^3 x_i = \Sigma x_i$ und $\prod_1^3 x_i = \Pi x_i$. Der Seite a_i im Bezugsdreieck Δ liege der Winkel α_i mit dem Scheitel A_i gegenüber. A_i sei der eine Endpunkt der Winkelhalbierenden w_i und der Seitenhalbierenden m_i . R , r und s seien Um-, Inkreisradius und halber Umfang von Δ , r_i der Radius des a_i berührenden Ankreises.

Wir zeigen vor allem, dass

$$\begin{array}{l} A(m_i) \leq A(r_i) \\ G(m_i) \geq G(r_i) \end{array} \quad (\text{I})$$

und

$$\begin{array}{l} \sqrt{3} A(a_i) \leq 2 A(r_i) \\ \sqrt{3} G(a_i) \geq 2 G(r_i) \end{array} \quad (\text{II})$$

mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck gilt. Überhaupt realisiert in den jeweiligen Beweisgängen bei « $\leq$ » und « $\geq$ » nur die reguläre Figur das Gleichheitszeichen, wenn beide Seiten drei Grössen aufweisen. Überdies folgen alle Ungleichungen jeweils aus JENSENS Überlegungen für die Funktionen einer Variablen¹⁾, falls nicht eine besondere Begründung angeführt wird. Die verwendeten *Gleichungen* sind leicht herzuleiten und grösstenteils, vielleicht sogar ausnahmslos, bekannt. Auf Herleitungen glauben wir deshalb hier verzichten zu dürfen.

2. Seitenhalbierende und Ankreisradien

Besonders reizvoll wird der Beweis der ersten Ungleichung von (I) auch für den Schüler, wenn wir die Anschauung zu Hilfe nehmen. Die Anregung dazu verdankt der Verfasser der Rubrik «Aufgaben für die Schule» dieser Zeitschrift²⁾.

¹⁾ JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*. Acta Mathematica 30, 175–193, 1906.

²⁾ El. Math. XIII, 2, Aufgabe 3 mit Figur 2, 45–46, 1958.