Die Kugel als Körper extremaler Korona

kann. Wie oft hört man die naive Frage, was es denn in der Mathematik noch Neues zu entdecken gebe, nachdem man sich mehr als zweitausend Jahre mit den Zahlen usf. wissenschaftlich auseinandergesetzt habe. Dass diese Frage in weiten Kreisen, wie gesagt auch in den gebildetsten, zu treffen ist, weist deutlich auf einen Mangel in der Gedankenführung im mathematischen Unterricht hin. Die Einsicht in die Tatsache, dass die Erweiterung der Erkenntnisse auf irgendeinem Gebiete auch wesentlich eine Erweiterung des Kreises der offenen Fragen bedeutet, scheint zu wenig verbreitet zu sein. *(Fortsetzung im nächsten Heft)* L. LOCHER-ERNST

Die Kugel als Körper extremaler Korona

Es bezeichne A eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n. Für ein $\varrho > 0$ werde

$$A^\varrho = \{p \in E^n \mid \exists\, q \in A : \quad d(p, q) = \varrho\} \tag{1}$$

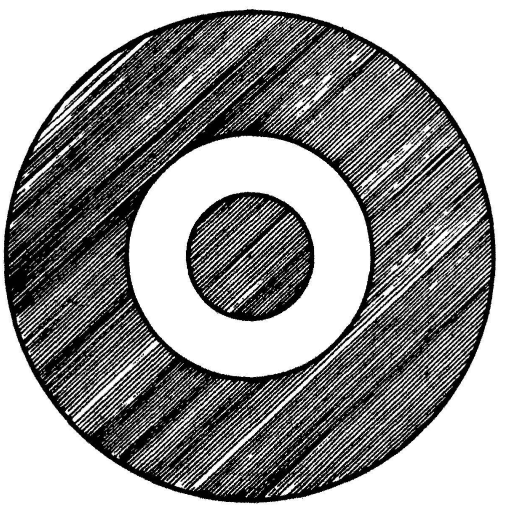
gesetzt, wobei $d(p, q)$ die euklidische Distanz der beiden Punkte p und q bedeutet. A^ϱ ist also die Menge derjenigen Punkte des Raumes, die von wenigstens einem Punkt von A den Abstand ϱ aufweisen. Man kann A^ϱ auch als Vereinigungsmenge der Kugelflächen vom Radius ϱ auffassen, die um Punkte von A als Mittelpunkte gelegt werden können. Ist ϱ grösser als der Durchmesser $D(A)$ von A, so stellt A^ϱ eine Punktmenge dar, die A umschliesst; wir wollen sie eine Korona von A nennen.

Wie A ist auch die Korona A^ϱ abgeschlossen und beschränkt. Man kann diesen Mengen demnach Volummasse V und V^ϱ zuschreiben (Lebesguesche Masse). In der vorliegenden Note wollen wir zeigen, dass die Kugel unter allen Punktmengen gleichen Volumens das kleinst mögliche Koronavolumen aufweist. Diese Tatsache wird durch die Ungleichung

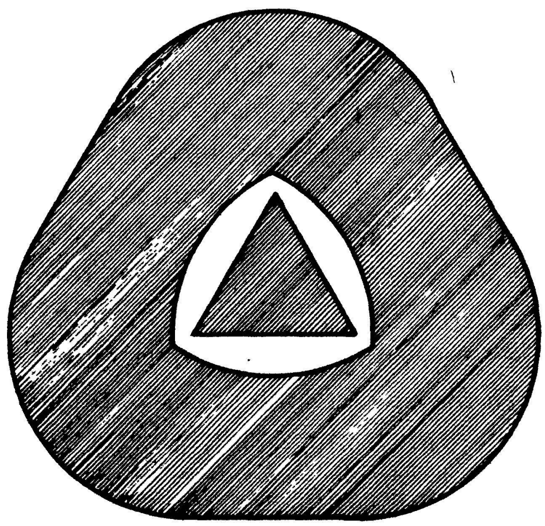
$$V^\varrho \geqq [\varrho\, \omega_n^{1/n} + V^{1/n}]^n - [\varrho\, \omega_n^{1/n} - V^{1/n}]^n \tag{2}$$

ausgedrückt, wobei ω_n das Volumen der n-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Im Falle $V > 0$ und $\varrho > D(A)$ gilt in (2) das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn A eine Kugel ist.



Figur 1



Figur 2

Die beiden Figuren beziehen sich auf den ebenen Fall ($n = 2$) und zwar zeigt Figur 1 die Korona eines Kreisbereichs der Fläche $F = \pi$ mit $\varrho = 3$; es ergibt sich für die Koronafläche $F^\varrho = 12\pi = 37{,}699$. Dagegen zeigt Figur 2 die Korona eines regulären Dreiecksbereiches mit der gleichen Fläche $F = \pi$ und ebenso $\varrho = 3$; für die Koronafläche errechnet man hier $F^\varrho = 44{,}310$.

Wir lassen nun den kurzen Beweis unserer Behauptung (2) folgen: Zunächst führen wir zwei Hilfsmengen ein, nämlich

$$B^\varrho = \{p \in E^n \mid \exists\, q \in A : \quad d(p, q) \leqq \varrho\}, \tag{3}$$

$$C^\varrho = \{p \in E^n \mid \forall\, q \in A : \quad d(p, q) < \varrho\}. \tag{4}$$

Hierbei ist B^ϱ abgeschlossen und C^ϱ offen. Ausserdem gelten offensichtlich die folgenden Beziehungen

$$C^\varrho \subset B^\varrho\,; \qquad A^\varrho \cup C^\varrho = B^\varrho\,; \qquad A^\varrho \cap C^\varrho = \phi\,, \tag{5}$$

wobei ϕ die leere Menge bedeutet.

Ist K die abgeschlossene Kugel vom Radius 1 und dem Ursprung $o \in E^n$ als Mittelpunkt und bezeichnet $\underline{K}$ den offenen Kern von K, so gelten für die Hilfsmengen (3) und (4) die Darstellungen

$$B^\varrho = \varrho K + A\,; \qquad C^\varrho = (\varrho \underline{K} - A)^*\,, \tag{6}$$

wobei ϱ die Dilatation von o aus, die Mengenverknüpfungen $+$ und $-$ die Minkowskische Addition und Subtraktion bedeuten und $*$ schliesslich den Übergang zu der bezüglich o spiegelsymmetrischen Menge anzeigt[1]). Nach (5) ergibt sich

$$V^\varrho = V(A^\varrho) = V(B^\varrho) - V(C^\varrho)\,. \tag{7}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Volummasse können nach dem Brunn-Minkowskischen Satz und dem Spiegeltheorem von ERHARD SCHMIDT passend geschätzt werden, indem im Hinblick auf die Darstellungen (6) auf

$$V(B^\varrho)^{1/n} \geqq \varrho\, V(K)^{1/n} + V(A)^{1/n} \tag{8}$$

$$V(C^\varrho)^{1/n} \leqq \varrho\, V(\underline{K})^{1/n} - V(A)^{1/n} \tag{9}$$

geschlossen werden kann[2]). Verwendet man diese Ungleichungen in (7), so resultiert mit der Bemerkung $V(K) = V(\underline{K}) = \omega_n$ direkt die Behauptung (2). Soll dort Gleichheit bestehen, so muss das nämliche für die Ungleichungen (8) und (9) gelten, was unter den genannten Bedingungen $V > 0$ und $\varrho > D$ genau dann zutrifft, wenn A eine Kugel ist. Damit ist der Beweis beendet. H. HADWIGER (Bern)

Ungelöste Probleme

Nr. 40. Welches ist die kleinste natürliche Zahl m der Eigenschaft, dass es noch eine Überdeckung der Ebene durch m Punktmengen so gibt, dass keine der m Mengen ein Punktepaar der Distanz 1 enthält?

[1]) Vgl. H. HADWIGER, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Springer Verlag 1957; Seite 142.

[2]) Vgl. die in [1]) zitierten Vorlesungen, Seite 159.