Die Kegelschnittsfunktionen

Autor(en): **Fladt, K.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 6

PDF erstellt am: **29.03.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-20716

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

[8] R. OBLÁTH, *Über die Zahl* $x^2 - 1$, Mathematica *B*, Zutphen, *8*, 161–172 (1940).
[9] – *Über die Gleichung* $x^m + 1 = y^n$. Annales Polonici Mathematici *1*, 73–76 (1954).
[10] J. W. S. CASSELS, *On the equation* $a^x - b^y = 1$. Proc. Camb. Phil. Soc. *56*, 2, 73–103 (1960).
[11] C. E. FRÖBERG, *Some computations of Wilson and Fermat remainders*, Math. Tables and other Tids to Computation *12*, 281 (1958).

Die Kegelschnittsfunktionen

1. Schon JAMES GREGORY (1638–75) hat in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, Padua 1667, gezeigt, wie man mit Hilfe einbeschriebener und umbeschriebener Vielecke die Flächeninhalte von Ellipse und Hyperbel nach demselben elementaren Verfahren wie beim Kreis bestimmen kann. Nicht allgemeiner bekannt zu sein scheint, dass man auch die Theorie der Kreis- und Hyperbelfunktionen als eine Theorie der Kegelschnittsfunktionen völlig einheitlich und elementar *ohne jeden rechnerischen Grenzübergang* aufbauen kann. Zwar weiss jeder, dass Hyperbelsinus und -cosinus Funktionen nicht des Hyperbelbogens, sondern des doppelten Hyperbelsektors sind und dass man auch beim Kreis den Bogen als doppelten Sektor auffassen kann. Weniger bekannt ist, dass diese Dinge der affinen Geometrie angehören und damit eine ganz elementare Theorie ermöglichen, bei denen Kreis- und Hyperbelfunktionen in gleicher Bezeichnung erscheinen. Besonders für die gemeinsame Behandlung der beiden in der nichteuklidischen Geometrie scheint sie mir nützlich zu sein[1]).

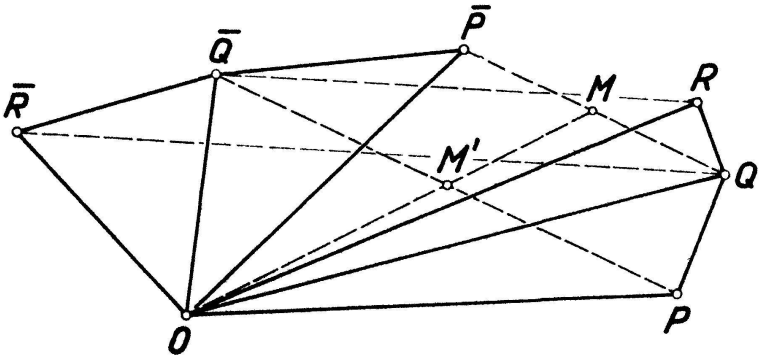
2. Wir nehmen die Gleichung des Mittelpunktskegelschnitts, bezogen auf ein affines $x_1 \mid x_2$-Koordinatensystem in der Gestalt

$$x_1^2 + \varepsilon\, x_2^2 = 1 \tag{1}$$

an. Die Koordinatenachsen sind konjugierte Durchmesser. Ist $P(p_1 \mid p_2)$ ein Punkt von (1), so hat der Endpunkt P' des zu $\overline{OP}$ konjugierten Halbmessers $\overline{OP'}$ ($\Delta OPP'$ habe positiven Umlaufsinn) die Koordinaten $(-\varepsilon\, p_2 \mid p_1)$. Dabei ist im Fall der Hyperbel ($\varepsilon = -1$) P' allerdings der reelle Ersatzpunkt auf der konjugierten Hyperbel $\varepsilon\, x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Ist ferner $Q(q_1 \mid q_2)$ ein beliebiger von P verschiedener Punkt von (1), so ist

$$2\,\Delta\, OPQ = p_1 q_2 - p_2 q_1\,, \quad 2\,\Delta\, OQP' = p_1 q_1 + \varepsilon\, p_2 q_2\,. \tag{2}$$



Figur 1

[1]) Vergleiche dazu L. HEFFTER, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Geometrie 3*, S. 153ff., Stuttgart 1958.

Nun seien drei Punkte $P, Q, \bar{P}$ des Kegelschnitts gegeben (Figur 1)[2]). Die Aufgabe sei, $\bar{Q}$ so zu bestimmen, dass

$$\Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q} \tag{3}$$

wird.

Ist M die Mitte von $Q\bar{P}$, so existiert eine Affinspiegelung mit OM als Achse und $Q\bar{P}$ als Richtung, die $\Delta\, OPQ$ in $\Delta\, O\bar{P}\bar{Q}$ überführt, wodurch Q eindeutig bestimmt ist.

Es gilt nun

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q} & (3_1) \\ \Delta\, OQ\bar{P} = \Delta\, OQ\bar{P} & \\ \hline OPQ\bar{P} = \quad OQ\bar{Q}\bar{P} & \\ \Delta\, PQ\bar{P} = \Delta\, \bar{Q}Q\bar{P} & \\ \hline \Delta\, OP\bar{P} = \Delta\, OQ\bar{Q}\,, & (4_1) \end{array}$$

und aus (4_1) folgt rückwärts wieder (3_1).

Man kann so fortfahren:

$$\begin{array}{rl} \Delta\, ORS = \Delta\, O\bar{R}\bar{S} & (3_4) \\ \Delta\, OR\bar{R} = \Delta\, OS\bar{S} & (4_4) \\ \Delta\, OP\bar{P} = \quad OS\bar{S} & (4_5) \\ \hline \Delta\, OPS = \quad O\bar{P}\bar{S}\,. & (2_5) \end{array}$$

ist, so folgt

$$\Delta\, OP\bar{P} = \Delta\, OP_i\bar{P}_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n = \Delta\, OQ\bar{Q} \tag{3}$$

und damit

$$\Delta\, OPQ = \Delta\, O\bar{P}\bar{Q}\,. \tag{4}$$

Gilt umgekehrt (4) und dazu (2) ohne $\Delta\, OP_nQ = \Delta\, O\bar{P}_n\bar{Q}$, so gilt auch das letztere.

Wir haben in gleicher Weise für Ellipse und Hyperbel den

Satz 1. Sind einem Mittelpunktskegelschnitt eine Kette von Dreiecken OPP_1, OP_iP_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, OP_nQ sowie eine Kette von gleichvielen ihnen paarweise inhaltsgleichen Dreiecken $O\bar{P}\bar{P}_1$, $O\bar{P}_i\bar{P}_{i+1}$, $O\bar{P}_n\bar{Q}$ einbeschrieben, so sind auch die Dreiecke OPQ und $O\bar{P}\bar{Q}$ flächengleich, und sind umgekehrt diese flächengleich, so kann man die vorige Kette wiederfinden und zwar für jede beliebige Anzahl n von Kettengliedern und ganz unabhängig von der Wahl der Ecken $P_1, P_2, \ldots, P_n$ auf dem Kegelschnitt.

Ist R ein weiterer Punkt von (1), so gibt es einen Punkt R auf (1), dass

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OQR = \Delta\, OQR & (3_2) \\ \Delta\, OQQ = \Delta\, ORR & (4_2) \end{array}$$

nach (4_1):

$$\begin{array}{rl} \Delta\, OP\bar{P} = \quad OR\bar{R} & (4_3) \\ \hline \Delta\, OPR = \Delta\, O\bar{P}\bar{R} & (3_3) \end{array}$$

ist.

Geht man zu je $n+2$ Punkten $P, P_1, P_2, \ldots, P_n, Q$ und $\bar{P}, P_1, \bar{P}_2, \ldots, \bar{P}_n, \bar{Q}$ über, so dass

$$\left.\begin{array}{r} \Delta\, OPP_1 = \Delta\, O\bar{P}\bar{P}_1\,, \\ \Delta\, OP_iP_{i+1} = \Delta\, O\bar{P}_i\bar{P}_{i+1} \\ i = 1, 2, \ldots n-1 \\ \Delta\, OP_nQ = \Delta\, O\bar{P}_nQ \end{array}\right\} \tag{2}$$

[2]) Ein Mittelpunktskegelschnitt ist durch den Mittelpunkt und drei Punkte bestimmt, daher ist in Figur 1 $OPQ\bar{P}\bar{Q}$ exakt, dagegen R schematisch hinzugefügt.

Schaltet man nun nicht endlich viele Zwischenpunkte ein, sondern geht zur Grenze $n \to \infty$ über, so gehen die beiden Dreiecksketten, die ja flächengleich sind, in die beiden Kurvensektoren $\overset{\frown}{OPQ}$ und $\overset{\frown}{O\bar{P}\bar{Q}}$ über: *Diese sind also flächengleich.* Wir haben daher *ohne jeden rechnerischen Grenzübergang* den

Satz 2. Haben in einem Mittelpunktskegelschnitt zwei von je zwei Halbmessern und einer Sehne begrenzte Dreiecke denselben Flächeninhalt, so sind auch die Flächen der von den Halbmesserpaaren begrenzten Sektoren gleich.

Wir können Satz 2 auch so ausdrücken:

Satz 3. Bei einem Mittelpunktskegelschnitt ist der Flächeninhalt eines von zwei Halbmessern begrenzten Sektors nur von der Fläche des von den Halbmessern und der zugehörigen Sehne begrenzten Dreiecks abhängig, nicht von der Lage des Dreiecks.

Durch indirekten Beweis folgt die Umkehrung von Satz 3:

Satz 4. Bei einem Mittelpunktskegelschnitt ist der Flächeninhalt eines von zwei Halbmessern und der zugehörigen Sehne begrenzten Dreiecks nur von der Fläche des zugehörigen Kegelschnittssektors abhängig, nicht von der Lage des Dreiecks:

$$2\,\Delta\, OPQ = p_1 q_2 - p_2 q_1 = F_1\,(2\,\overset{\frown}{OPQ})\,. \tag{5}$$

3. Wir können aber sofort ein zweites solches Dreieck angeben, nämlich das in 2. eingeführte:

$$2\,\Delta\, OQP' = p_1 q_1 + \varepsilon\, p_2 q_2 = F_2\,(2\,\overset{\frown}{OPQ})\,. \tag{6}$$

Denn es gilt die Lagrangesche Identität

$$(p_1^2 + \varepsilon\, p_2^2)\,(q_1^2 + \varepsilon\, q_2^2) = (p_1 q_1 + \varepsilon\, p_2 q_2)^2 + \varepsilon\,(p_1 q_2 - p_2 q_1)^2 \tag{7}$$

und die entsprechende für die Punkte $\bar{P}$, $\bar{P}'$, $\bar{Q}$. Aus (1), (5) und (7) folgt sofort

$$\Delta\, OQP' = \Delta\, O\bar{Q}\bar{P}', \tag{8}$$

womit (6) erwiesen ist. Wir wählen in (5) und (6) den doppelten Flächensektor

$$2\,\overset{\frown}{OPQ} = \varphi \tag{9}$$

als unabhängige Veränderliche und setzen

$$C_\varepsilon \varphi \equiv C\,\varphi = p_1 q_1 + \varepsilon\, p_2 q_2\,, \qquad S_\varepsilon \varphi \equiv S\,\varphi = p_1 q_2 - p_2 q_1 \tag{10}$$

$C\varphi$ heisse der *allgemeine Cosinus*, $S\varphi$ der *allgemeine Sinus*.

Nach Lagrange gilt dann

$$C^2 \varphi + \varepsilon\, S^2 \varphi = 1\,. \tag{11}$$

Ist A der Punkt $1 \mid 0$, B der Punkt $0 \mid 1$ (auch bei der Hyperbel als Punkt der konjugierten Hyperbel), und ist

$$2\,\overset{\frown}{OAP} = \varphi_2,\; 2\,\overset{\frown}{OAQ} = \varphi_1\,, \tag{12}$$

so ist

$$2\,\overset{\frown}{OPQ} = \varphi_1 - \varphi_2\,, \tag{13}$$

ferner

$$C\,\varphi_1 = q_1\,, \quad S\,\varphi_1 = q_2\,, \quad C\,\varphi_2 = p_1\,, \quad S\,\varphi_2 = p_2\,.$$

Also kommt aus (10) das *Subtraktionstheorem*

$$C\,(\varphi_1 - \varphi_2) = C\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 + \varepsilon\,S\,\varphi_1\,S\,\varphi_2\,, \quad S\,(\varphi_1 - \varphi_2) = S\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 - S\,\varphi_2\,C\,\varphi_1 \tag{14}$$

und wenn man $\varphi_1 = \varphi_2 + \varphi$ setzt, durch Auflösen nach $C\,\varphi_1$ und $S\,\varphi_1$ mittels (11) das *Additionstheorem*

$$C\,(\varphi_1 + \varphi_2) = C\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 - \varepsilon\,S\,\varphi_1\,S\,\varphi_2\,, \quad S\,(\varphi_1 + \varphi_2) = S\,\varphi_1\,C\,\varphi_2 + S\,\varphi_2\,C\,\varphi_1\,, \tag{15}$$

womit unsere Aufgabe im wesentlichen gelöst ist.

Wir bemerken noch, dass sich wegen

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{S\,\varphi}{\varphi} = 1 \tag{16}$$

die Ableitungen

$$\frac{dS\,\varphi}{d\,\varphi} = C\,\varphi\,, \quad \frac{dC\,\varphi}{d\,\varphi} = \varepsilon\,S\,\varphi \tag{17}$$

ergeben und dass aus (15)

$$C\,(\varphi_1 + \varphi_2) + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,(\varphi_1 + \varphi_2) = (C\,\varphi_1 + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi_1)\,(C\,\varphi_2 + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi_2) \tag{18}$$

folgt. Damit ergibt sich dann durch Überlegungen, die der Analysis angehören und hier nicht zur Diskussion stehen,

$$\left.\begin{aligned} C\,\varphi + \sqrt{-\varepsilon}\,S\,\varphi &= e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} \\ C\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} + e^{-\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi}\right), &\quad S\,\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}}\left(e^{\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi} - e^{-\sqrt{-\varepsilon}\,\varphi}\right). \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für $\varepsilon = +1$ ist also (20a) $C\,\varphi = \cos\varphi$, $S\,\varphi = \sin\varphi$,
für $\varepsilon = -1$ aber (20b) $C\,\varphi = \operatorname{ch}\varphi$, $S\,\varphi = \operatorname{sh}\varphi$,

wie es ja schon per definitionem sein muss.

Natürlich muss man dann noch die allgemeinen Funktionen Tangens und Cotangens vermöge

$$T\,\varphi = \frac{S\,\varphi}{C\,\varphi}\,, \quad Ct\,\varphi = \frac{1}{T\,\varphi} \tag{20}$$

einführen.

K. Fladt, Calw

Eine neue Methode zum Zeichnen einer Schrägperspektive mittels einer Frontalperspektive

Beim Zeichnen einer Zentralperspektive machen unzugängliche Fluchtpunkte häufig unliebsame Schwierigkeiten. Diese Schwierigkeiten können zwar mittels graphischer Ausweichkonstruktionen oder mechanischer Hilfsmittel bewältigt werden, verursachen aber doch Verluste an Zeit und Genauigkeit. In der vorliegenden Mit-