Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 5

Ungelöste Probleme

Nr. 37. Das zurzeit noch ungelöste HILBERT-DEHNsche Problem besteht bekanntlich darin, notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass zwei Polyeder des gewöhnlichen Raumes zerlegungsgleich sind, sich also im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele paarweise kongruente Teilpolyeder zerlegen lassen. – Eine möglicherweise leichter lösbare Aufgabe ergibt sich, wenn die der klassischen Zerlegungsgleichheit zugrunde liegende Bewegungsgruppe durch die Translationsgruppe ersetzt wird. Das so modifizierte neue Problem lautet dann: Es sind notwendige und hinreichende Bedingungen dafür anzugeben, dass zwei Polyeder des gewöhnlichen Raumes translativ-zerlegungsgleich sind, so dass diese also im Sinne der Elementargeometrie in endlich viele paarweise translationsgleiche Teilpolyeder zerlegbar sind. Die hier zu erörternde Verwandschaft zweier Polyeder ist eine ungleich viel engere als die durch die klassische Zerlegungsgleichheit gegebene, und es ist naturgemäss auch viel leichter, etwa inhaltsgleiche, aber nicht translativ-zerlegungsgleiche Polyeder aufzuweisen. Beispielsweise ist ein reguläres Tetraeder gewiss nicht translativ-zerlegungsgleich mit einem mit ihm kongruenten und zentralsymmetrisch liegenden Tetraeder, was mit den weiter unten folgenden notwendigen Bedingungen leicht erschliessbar ist.

Zu den bisherigen Lösungsversuchen, die noch nicht restlos zum Ziele führten, sei hier folgendes mitgeteilt:

Für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder A und B ist selbstverständlich die Bedingung

$$V(A) = V(B) \tag{a}$$

notwendig, wobei $V(A)$ das Volumen von A bedeutet.

Weitere notwendige Bedingungen ergeben sich wie folgt:

Es sei (u, v) ein geordnetes Paar von normierten und aufeinander orthogonal stehenden Vektoren des Raumes. Eine Seitenfläche S des Polyeders A, die in der Ebene E liegen möge, soll u-Seitenfläche genannt werden, wenn die längs S nach aussen weisende Normale von A die Richtung u besitzt. Eine Kante K von A, die Teilstrecke des polygonalen Randes der Seitenfläche S ist, soll uv-Kante heissen, wenn S eine u-Seitenfläche ist und wenn die in E liegende, längs K nach aussen weisende Normale von S die Richtung v aufweist.

Es bezeichne weiter $f(u)$ die Summe der Flächeninhalte aller u-Seitenflächen des Polyeders A und $l(u, v)$ die Summe der Längen aller uv-Kanten. Wenn zu dem Vektor (u) bzw. zum Vektorzweibein (u, v) keine Seitenfläche bzw. keine Kante aufgewiesen werden kann, welche den gestellten Bedingungen genügt, so soll $f(u) = 0$ bzw. $l(u, v) = 0$ gesetzt werden. Nun sei

$$F(A; u) = f(u) - f(-u),$$
$$L(A; u, v) = l(u, v) - l(u, -v) - l(-u, v) + l(-u, -v).$$

Für ein vorgegebenes Polyeder A verschwinden die Funktionale $F(A; u)$ und $L(A; u, v)$ für «fast alle» Vektoren (u) und Vektorzweibeine (u, v); lediglich in endlich vielen Fällen ergeben sich nichttriviale Werte. Bei fest gewählten Vektoren u und v und variabel gedachtem Polyeder A stellen $F(A; u)$ und $L(A; u, v)$ Polyederfunktionale dar, die wie das Volumen $V(A)$ translationsinvariant und einfach-additiv sind und also Lösungen der beiden Funktionalbedingungen

$$\varphi(P) = \varphi(Q) \quad [P \cong Q]; \quad \varphi(P + Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$$

sind, wobei «$\cong$» die Translationsgleichheit und «$+$» die Zusammensetzung im Sinne der Elementargeometrie bezeichnen.

So ergibt sich jetzt leicht, dass für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder A und B die weiteren Bedingungen

$$F(A; u) = F(B; u) \tag{b}$$

$$L(A; u, v) = L(B; u, v) \tag{c}$$

notwendig sind. Die formal unendlich vielen Bedingungen gemäss der kontinuierlich vielen wählbaren Vektoren u und v reduzieren sich in jedem individuellen Fall auf endlich viele, da diese, wie aus den oben gegebenen Vermerkungen hervorgeht, «fast immer» auf triviale Weise erfüllt sind.

Das hier vorgetragene speziellere ungelöste Problem lautet:

Sind die für die translative Zerlegungsgleichheit zweier Polyeder A und B notwendigen Bedingungen a), b) und c) auch hinreichend, oder existieren noch weitere unabhängige Bedingungen?

H. HADWIGER

Kleine Mitteilungen

Ein räumliches Analogon zur Aufgabe von Ottajano

Die im Jahre 1788 von A. GIORDANO aus Ottajano gestellte Aufgabe [1] besteht darin, *ein n-Seit zu konstruieren, das einem gegebenen Kreis ein- und gleichzeitig einem gegebenen n-Eck umbeschrieben ist.* Ersetzt man den Kreis durch einen beliebigen Kegelschnitt, so entsteht wegen des projektiven Charakters der Aufgabe keine wesentliche Verallgemeinerung. Hier soll nun die *Übertragung des Problems auf den Raum* vorgenommen werden: *Es ist ein (i. allg. windschiefes) n-Seit gesucht, das einer gegebenen einteiligen Quadrik Φ ein- und gleichzeitig einem gegebenen (i. allg. nicht ebenen) n-Eck umbeschrieben ist.* Von einem Sonderfall dieses Schliessungsproblems handelt die in den «Elementen der Mathematik» erschienene Aufgabe 356 von C. BINDSCHEDLER. Dort wird verlangt, einer gegebenen Kugel ein i. allg. windschiefes Vierseit einzuschreiben, dessen Seiten durch vier gegebene Punkte gehen.

Die gegebene Quadrik heisse Φ, die Eckpunkte des gegebenen n-Ecks werden mit A_i, die des gesuchten n-Seits mit P_i bezeichnet, wobei $P_i\,P_{i+1}$ mit A_i inzidieren und die Festsetzungen $A_{n+1} = A_1$ bzw. $P_{n+1} = P_1$ gelten sollen. Zur Lösung der Aufgabe projizieren wir der Reihe nach die Quadrik Φ aus den gegebenen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ auf sich selbst. Einem beliebigen Ausgangspunkt X_1 der Quadrik Φ werden durch diese n Zentralprojektionen n Bildpunkte $X_2, X_3, \ldots X_{n+1}$ zugeordnet. Diese Punkte X_i liegen so auf Φ, dass der Verbindungsstrahl $x_i = X_i\,X_{i+1}$ durch das Zentrum der i-ten Zentralprojektion A_i geht. Die gestellte Aufgabe besteht nun darin, jene Punkte X_i der Quadrik Φ zu suchen, für die $X_1 = X_{n+1}$ gilt. Um diese «geschlossenen Sehstrahlpolygone» x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ zu finden, haben wir unser Augenmerk auf die Punktverwandtschaft $X_1 \to X_{n+1}$ zu richten. Die automorphe Zentralkollineation $\mathfrak{A}_i$ der Quadrik Φ mit dem Zentrum in A_i induziert auf Φ eine Punktverwandtschaft $\mathfrak{L}_i$, die X_i mit X_{i+1} vertauscht; die Zusammensetzung aller $\mathfrak{A}_i$ ist eine allgemeine automorphe Kollineation $\mathfrak{K}$ von Φ, die auf Φ den Übergang $X_1 \to X_{n+1}$ bewerkstelligt. $\mathfrak{K}$ induziert auf Φ eine Verwandtschaft $\mathfrak{L}$, diese vertauscht jeweils die Erzeugenden und die Kegelschnitte von Φ unter sich, ist also eine «Kegelschnittverwandtschaft» auf Φ. Ferner gilt, dass in entsprechenden Punkten