

Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 4

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

Le problème reste ouvert quel est le plus petit nombre naturel k tel que les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$ sont tous composés.

Il est à remarquer que M. P. ERDÖS a démontré qu'il existe une infinité de nombres naturels impairs k tels que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, est composé (divisible par un des nombres 3, 5, 7, 13, 17, 241). Voir P. ERDÖS [2], page 7; voir aussi mon livre [3], page 379, où se trouve la démonstration de A. SCHINZEL d'existence d'une infinité de nombres impairs k tels que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, est composé et a un diviseur premier < 100 .

Or, M. A. SCHINZEL a démontré que si k est un tel nombre, alors tous les nombres $k \cdot 2^n + 1$, où $n = 1, 2, \dots$, sont composés. Voici sa démonstration:

Supposons que k est un nombre naturel tel que chacun des nombres $2^n + k$, où $n = 1, 2, \dots$, a un diviseur premier $p \mid P$, où P est un nombre naturel impair donné. D'après l'hypothèse, le nombre $2^{n[\varphi(P)-1]} + k$ a un diviseur premier $p \mid P$. Or, on a $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{P}$, d'où $2^{n\varphi(P)} \equiv 1 \pmod{p}$, et, comme $2^{n[\varphi(P)-1]} + k \equiv 0 \pmod{p}$, on trouve $k \cdot 2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, c. q. f. d.

W. SIERPIŃSKI (Varsovie)

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. M. ROBINSON, *A report on primes and on factors of Fermat numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 9, 673–681 (1958).
- [2] P. ERDÖS, *On integers of the form $2^n + p$ and some related problems*, Summa Brasiliensis Mathematicae Vol. II, Fasc. 8, 119 (1950).
- [3] W. SIERPIŃSKI, *Teoria Liczb*, Cz. II, Monografie Matematyczne t. 38, Varsovie 1959.

Ungelöste Probleme

Nr. 36. Das n -te Distanzpotenzintegral eines eigentlichen konvexen Körpers A des gewöhnlichen Raumes ist durch Ansatz

$$T_n = T_n(A) = \iint r^n dP dQ \quad [n \geq -2, \text{ ganz}]$$

gegeben, wobei P und Q zwei in A unabhängig variierende Punkte, r die Distanz zwischen P und Q und dP und dQ die Volumendifferentiale bezeichnen. Zahlreiche geometrische und physikalische Körperfunktionale hängen mit solchen Distanzpotenzintegralen zusammen. Wenn V das Volumen bedeutet, so gelten beispielsweise die folgenden Beziehungen: $T_{-2} = 4\pi \tilde{r} V$ (\tilde{r} = mittlere Ausstrahlungsweglänge); $T_{-1} = S$ (Newtonsches Selbstpotential); $T_0 = V^2$; $T_2 = 2 I V$ (I = polares Trägheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes). Eine interessante Frage ergibt sich, wenn man nach dem Extremalkörper sucht, der bei vorgeschriebener Norm N ein maximales Distanzpotenzintegral aufweist. Die Norm ist durch $N = 2\pi \bar{b}$ definiert, wo \bar{b} die mittlere Breite des Körpers A bezeichnet; ein anderer Zusammenhang wird mit $N = M$ (Integral der mittleren Krümmung) gegeben. Ist K eine mit A normgleiche Kugel, so steht in erster Linie die Ungleichung

$$T_n(A) \leq T_n(K) \quad [N(A) = N(K)] \quad (*)$$

zur Diskussion, welche die Extremaleigenschaft der Kugel ausdrückt. Nach den heute vorliegenden Ergebnissen zeigt sich, dass Ungleichung (*) sicher richtig ist für

$n = -2, -1, 0, 2$, dagegen fraglich bleibt für $n = 1, 3, 4, 5$ und sicher falsch ist für $n = 6, 7, \dots$. Dass die Kugel für $n \geq 6$ ihre Extremaleigenschaft einbüsst, wurde von KUMMER¹⁾ nachgewiesen. Da sich in der neueren Fachliteratur auch ein Ergebnis findet, das diesem Tatbestand widerspricht, wurde der obengenannte theoretisch ermittelte Befund auch praktisch-numerisch mit Hilfe eines Rechenautomaten überprüft²⁾. Es sei E_x ein Rotationsellipsoid mit den Halbachsen r, r, xr ($1 \leq x < \infty$), das mit der Einheitskugel $E_1 = K$ normgleich ist, und es sei

$$q(x) = \frac{T_6(E_x)}{T_6(K)} \quad [N(E_x) = N(K)]$$

das Verhältnis der entsprechenden sechsten Distanzpotenzintegrale. Wenn $q(x) > 1$ ausfallen kann, ist offenbar bereits bewiesen, dass die Kugel die hier fragliche Extremaleigenschaft für $n = 6$ eingebüsst hat. Nun ergibt eine Berechnung, auf die wir hier verständlicherweise nicht eingehen können:

$$q(x) = \frac{4096 (x^2 - 1)^6 (16x^2 + 8x^4 + 6x^6 + 5x^8)}{35 \{x\sqrt{x^2 - 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\}^{12}}$$

Hierzu führen wir einige mit dem Gerät ermittelte numerische Werte an:

x	$q(x)$
1,00	1,000 0000
1,40	1,046 4592
1,80	1,107 5398
2,20	1,089 9263
2,60	0,997 4864
1,92	1,111 7633

Die unterste Zeile gibt das numerisch bestimmte Maximum von $q(x)$; damit ist belegt, dass das Rotationsellipsoid mit dem Achsenverhältnis $x = 1,92$ das optimale sechste Distanzpotenzintegral liefert, das etwas grösser ausfällt als dasjenige der normgleichen Kugel.

Damit resultiert das Problem: *Welche konvexen Körper weisen unter allen normgleichen das grösstmögliche Distanzpotenzintegral auf, wenn $n \geq 6$ ist?* Diese noch unbekanntes Extremalkörper dürften Zentralsymmetrie aufweisen! H. HADWIGER

¹⁾ H. KUMMER, *Über Sehnenpotenzintegrale konvexer Körper im k-dimensionalen Raum*, Manuskript (Bern 1957).

²⁾ Ausgeführt im Institut für angewandte Mathematik der Universität Bern, Frühjahr 1959.

Kleine Mitteilungen

A Special Higher Congruence

Let p be a prime > 2 . If the congruence

$$x^{p+1} + ax^p + bx + c \equiv 0 \pmod{p^2} \tag{1}$$

is solvable, then clearly the quadratic congruence

$$x^2 + (a+b)x + c \equiv 0 \pmod{p} \tag{2}$$

is solvable. Thus a necessary condition for the solvability of (1) is that

$$d = (a+b)^2 - 4c \tag{3}$$