Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **15 (1960)**

Heft 3

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Wird der Koordinatenursprung nach U^v verlegt, so folgen aus $dX^*/ds^* = \cos\tau$ und $dY^*/ds^* = \sin\tau$ die Gleichungen

$$X^* = rc^2 \int_0^\tau \frac{\cos\tau\, d\tau}{(c^2 - \tau^2)^{3/2}}, \quad Y^* = rc^2 \int_0^\tau \frac{\sin\tau\, d\tau}{(c^2 - \tau^2)^{3/2}}. \tag{14}$$

Auch diese Integrale sind nicht elementar auswertbar.

Für die *natürliche Gleichung* von f^v findet man durch Elimination von τ aus s^* und $\varrho^* = ds^*/d\tau$ die Form

$$c^2 r^4 \varrho^{*2} = (r^2 + s^{*2})^3. \tag{15}$$

W. Wunderlich, Wien

Bemerkung und Lösung zum Problem Nr. 29

Unendlich viele Primzahlen der Form $8n + 1$
mit geradem und ungeradem Exponenten für 2

Diese Notiz soll zum «ungelösten Problem Nr. 29» in Band 14, Heft 3, der «Elemente» auf S. 60 (gestellt von W. Sierpiński) Stellung nehmen und auch dessen vollständige Lösung bringen sowie sie etwas verallgemeinern. Es handelt sich um die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen $p = 8n + 1$ gibt, welche einen geraden bzw. ungeraden kleinsten positiven Exponenten e mit $2^e \equiv 1(p)$ haben. – Zunächst wurden versehentlich die Primzahlen 17, 41, 97, welche Beispiele für geraden Exponenten ($e = 8, 10, 48$) sein sollten, als solche für ungeraden Exponenten angeführt; dafür dienen etwa 73 und 89 ($e = 9, 11$).

Sodann kann man die gestellte Frage in beiden Fällen positiv beantworten, und zwar auf Grund des verallgemeinerten «Dirichletschen Reihensatzes» im Körper der Gaussischen Zahlen $K(i)$ in Verbindung mit dem Westernschen Kriterium für den 8. Potenzcharakter der Zahl 2 [A. E. Western, *Some Criteria for the Residues of Eigth and Other Powers*, Proc. London math. Soc. (2) *9*, 244–272 (1911); vom Verfasser weiter ausgeführt, Deutsche Math. *4*, 44–52 (1939)]. Danach gibt es unendlich viele Primideale aus den Restklassen $\pm 3 + 8i$, $\pm 5 + 8i$ mod 16, also unendlich viele natürliche Primzahlen der Restklasse $16n + 9$ mit der Darstellung $x^2 + 64u^2$ (u ungerade), und nach diesen ist *2* ein 8. Potenzrest, 2 kommt somit ein ungerader Exponent zu.

Auf demselben Wege kann man auch unendlich viele Primzahlen mit bezüglich 2 geradem Exponenten nachweisen, ohne auf die sehr speziellen Teiler der Fermat-Zahlen $2^{2^n} + 1$ zu greifen. Es sind dies solche, nach denen 2 nicht biquadratischer oder wenigstens nicht 8. Potenzrest ist. Diese erhält man aus den Primideal-Restklassen $\pm 1 + 4i$, $\pm 3 + 4i$ mod 8 bzw. ± 3, ± 5 mod 16, das gibt natürliche Primzahlen mit der Darstellung $x^2 + 16u^2$ (u ungerade) bzw. solche der Form $16n + 9$ mit der Darstellung $x^2 + 256y^2$ (Beispiele 281, 617). Nach letzteren gehört übrigens die Zahl -2 als 8. Potenzrest zu einem ungeraden Exponenten. Es gibt also auch unendlich viele Primzahlen der Form $8n + 1$ mit ungeradem Exponenten für -2, wie er allen Primzahlen der Art $8n + 3$ zukommt. Hier wird der Exponent für 2 genau durch 2, nicht durch 4 teilbar.

Am Schlusse sei dieses Ergebnis noch dahin verallgemeinert, dass es zu jedem «Geradheitsgrad» dieses Exponenten unendlich viele Primzahlen der Klasse $8n+1$ gibt. Es soll also der Exponent genau durch 2^k, nicht durch 2^{k+1} teilbar sein. Unter $k=1$ fallen die vorhin erwähnten $p = 16n+9 = x^2+256y^2$. Und für $k \geqq 2$ bedienen wir uns der Primzahlen x^2+16u^2, nach welchen allen 2 nicht biquadratischer Rest ist. Durch geeignete Wahl der ungeraden Zahlen x und u lässt es sich stets so einrichten, dass $x^2+16u^2 \equiv 1 + 2^{k+1} \bmod 2^{k+2}$ wird. Und aus allen diesen Restklassen $x+4ui \bmod 2^{k+1}$ gibt es unendlich viele Primideale. A. AIGNER, Graz

Aufgaben

Aufgabe 346. Wieviele modulo einer Primzahl p irreduzible, ganzzahlige Polynome mit dem ersten Koeffizienten 1 gibt es, wenn modulo p kongruente Polynome nicht unterschieden werden? H. LENZ, München

Lösung: Wir bezeichnen mit $A(m)$ die Anzahl aller unitärer irreduzibler Polynome vom Grad m über dem Primkörper $P = GF(p)$ der Charakteristik p. Bekanntlich ist

$$x^{p^m} - x$$

das Produkt aller unitärer irreduzibler Polynome vom Grad $d \mid m$. Daher ist

$$p^m = \sum_{d|m} dA(d)\,,$$

und hieraus ergibt sich mittels der Umkehrformel von Möbius

$$A(m) = \frac{1}{m} \sum_{d|m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) p^d.$$

A. BAGER, Hjørring

Der Aufgabensteller gibt für die Anzahl der über einem Körper mit p^n Elementen irreduziblen Polynome mit dem ersten Koeffizienten 1 den allgemeineren Ausdruck

$$\frac{1}{m} \sum_{d|m} p^{nd} \mu\left(\frac{m}{d}\right).$$

Weitere Lösungen sandten J. FIEDLER (Regensburg) und W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 347. In einer Ebene sind die Kreise K, K' und die Punkte P_1, P_2, P_3 gegeben. Gesucht werden die Punkte X_1, X_2, X_3 auf K und X'_1, X'_2, X'_3 auf K', so dass die drei Punkte-Quintupel $X_1X_2X'_1X'_2P_3$, $X_2X_3X'_2X'_3P_1$, $X_3X_1X'_3X'_1P_2$ je auf einem Kreis liegen. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Wir bezeichnen mit k_i den Kreis durch X_j, X'_j, X_k, X'_k $(i, j, k = 1, 2, 3)$. Je 2 dieser 3 Kreise k_i haben die Geraden $X_1X'_1$, $X_2X'_2$, $X_3X'_3$ zu Chordalen, die einander im Potenzzentrum A der Kreise k_i schneiden. Der Punkt A hat bezüglich der Kreise k_i die Potenz $\overrightarrow{AX_1} \cdot \overrightarrow{AX'_1} = \overrightarrow{AX_2} \cdot \overrightarrow{AX'_2} = \overrightarrow{AX_3} \cdot \overrightarrow{AX'_3} = q^2$. Der Kreis K durch X_1, X_2, X_3 und der Kreis K' durch X'_1, X'_2, X'_3 entsprechen einander in der Inversion am Orthogonalkreis k^* (Mittelpunkt A, Radius q) der Kreise k_i. A ist demnach ein (innerer oder äusserer) Ähnlichkeitspunkt von K und K'. Der Kreis k_i durch $X_jX'_jX_kX'_k$ und P_i enthält auch den an k^* gespiegelten Punkt P'_i von P_i. Die Kreise durch P_i und P'_i schneiden K in den Punktepaaren einer Involution mit dem Involutionszentrum Q_i, das auch auf der Geraden X_jX_k liegen muss. Das gesuchte Dreieck $X_1X_2X_3$ ist demnach dem Kreis K so eingeschrieben, dass seine Seiten X_jX_k durch die Punkte Q_i laufen (Problem des Ottaiano).